第２章　振動方程式

２．１　振動方程式の立て方

本章では、振動方程式の立て方について学ぶ。振動方程式の立て方には、基本的に三つの方法があり、以下にこれらの方法を示す。

（１）Newtonの第２法則

Newtonの第２法則は「質量mの質点の運動量の変化は質点に作用する力に比例する」というもので、この内容を一般式で書けば以下のようになる。

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \tag{2.1}$$

ここで、

$\mathbf{F}(t)$ ＝質点に作用する外力ベクトル

m ＝質点の質量

$\mathbf{x}$ ＝変位ベクトル

(2.1)式において、質量mが時間に関して変化しないものとすれば次式を得る。

$$\mathbf{F}(t) = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{2.2}$$

さらに、(2.2)式を書き直せば、

$$\mathbf{F}(t) - m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0 \tag{2.3}$$

上式は、図2.1に示すように、外力$\mathbf{F}(t)$と慣性力（$-md^2\mathbf{x}/dt^2$）とが釣合いの状態にあることを意味している。すなわち、運動している質点には、図2.1(a)または図(b)に示すように、慣性力を質点に加え外力$\mathbf{F}(t)$との釣合い条件式を立てればよい。このとき注意しなければならないのは慣性力の作用方向で、運動している方向(変位の正の方向)に対して逆向きの力を想定する。

運動の状態を、慣性力を含めた釣合いとして捉える考え方を最初に見出したのはダランベール[1]で、この考え方をダランベールの原理(d'Alembert's Principle)という。この内容を改めて書けば、以下のようになる。

「運動している質点には、－(**質量**)×(**加速度**) の力(慣性力)が発生し、

---

[1] Jean le Rond d'Alembert（仏）, (1717-1783).

この力と質点に作用する外力とは釣合の状態にある」

(質点に作用する外力) − (慣性力) ＝ 0 (2.4)

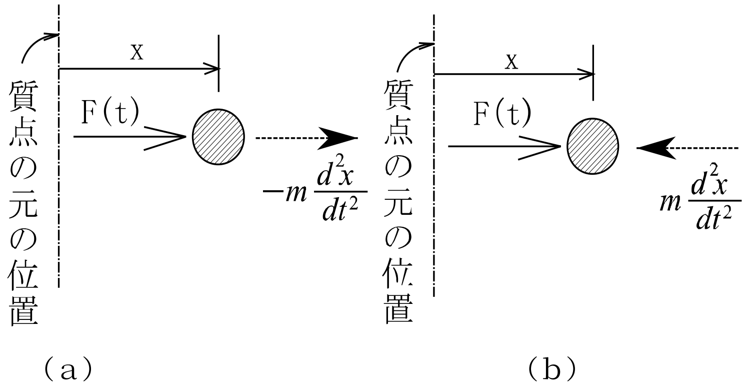


図２．１　質点に作用する力の釣合い

（２）Hamilton の原理[2]

エネルギーを元にして振動方程式を導く方法である。変分原理に基づく振動方程式は以下のように表わせる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \qquad (2.5)$$

ここで、t_1 と t_2 は任意の時間を表わす。また、

T ＝全運動エネルギー

V ＝系に貯えられるひずみエネルギー

W ＝系に作用する外力の仕事（減衰力を含める）

δ＝変分演算子

変分とは図2.2に示すように、真の状態（波形）から逸脱した変動分に対する各エネルギーの変化量を意味する。変分の演算は微分の演算と同じである。

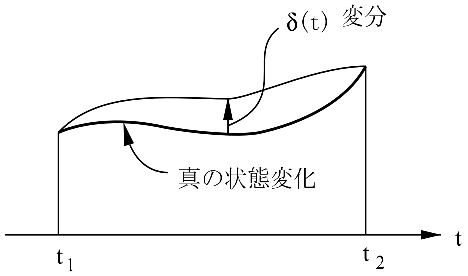


図２．２　変分

[2] Sir W. R. Hamilton(英),(1805-1865)。 Hamiltonの原理については、R. W. Clough and J. Penzien "Dynamics of Structures," McGraw−Hill Kogakusha, p11, 1975、が詳しい。

静的な場合にはT, V, Wは時間には無関係となる。また、運動エネルギーは０となるから(2.5)式で$T=0$と置けば次式を得る。

$$\delta(W-V)=0 \tag{2.6}$$

(2.6)式は静的解析におけるポテンシャルエネルギー最小原理[3]を表わしている。

（３） Lagrange の 運動方程式

多質点系の運動方程式を求めるのに便利な方法である。Lagrangeの運動方程式は以下のように表わされる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=Q_j,\ j=1\cdots n \tag{2.7}$$

ここで、

T＝全運動エネルギー

$$T=T(q_1,q_2\cdots q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2\cdots\dot{q}_n)$$

V＝ひずみエネルギー

$$V=V(q_1,q_2\cdots q_n)$$

Q_j＝ｊ質点に作用するq_j方向の外力

（減衰力を含める）

q_j＝一般化座標

一般化座標とは、ｉ質点の変位をｘｉとしてｘｉを、$x_i=x_i(q_1,q_2\cdots q_n)$と表わす。このとき、$q_1,q_2\cdots q_n$を一般化座標と呼ぶ。

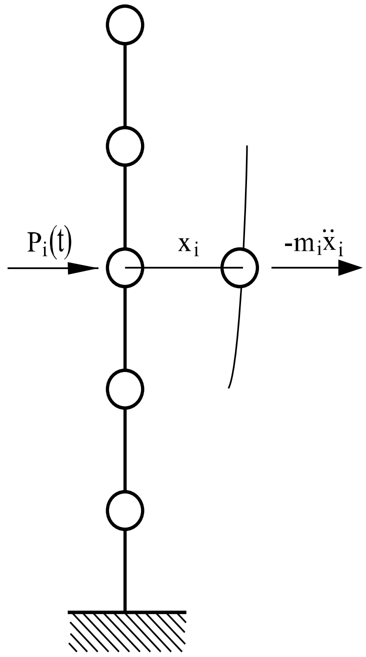
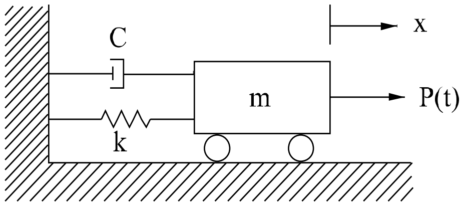


図２.３　多質点振動モデル

3　静力学におけるポテンシャルエネルギー最小原理については、例えば「　」を参照することをすすめる。

２．２　基本原理の応用

図2.4に示す例題を通して、振動方程式の立て方を示す。



k＝バネ定数
c＝ダッシュポットの減衰係数
m＝質量

図２．４　例　題

（１）　d'Alembert の 原理の応用

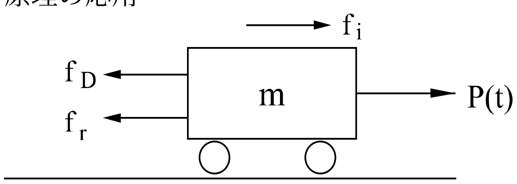


図２．５　質点に作用する力

図2.5における各記号の意味と、各力は以下の通りである。[4]

f_r ＝復元力　　　　$f_r = k \cdot x$　　　　(2.8)

f_D ＝減衰力（減衰力は減衰係数ｃと速度に比例するものと仮定する）

$$f_D = c \cdot \dot{x},\ \text{ここで、}\dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{2.9}$$

f_i ＝慣性力　　　　$f_i = -m \cdot \ddot{x}$，ここで、$\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$　　　　(2.10)

水平方向の力の釣合いは以下のように表せる。

$$-f_r - f_D + f_i + P(t) = 0 \tag{2.11}$$

上式に(2.8)～(2.10)式を代入すれば、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \tag{2.12}$$

上式が加振力 $P(t)$ を受ける１質点系の振動方程式となる。

この項のまとめとして、単位についてふれておく。

変位 x 、速度 $\dot{x}$ 、加速度 $\ddot{x}$ の各単位はつぎのようになる。

$$x = [m],\quad \dot{x} = [m/s],\quad \ddot{x} = [m/s^2]$$

4　復元力＝Restoring Force、 減衰力＝Damping Force、 慣性力＝Inertia Force またはInertial Force。

また、質量m、減衰係数c、ばね定数kの各単位は以下の通りである。

$$m=[kg],\quad c=[N/m/s],\quad k=[N/m]$$

したがって、(2.12)式の左辺の各項は全て力の単位$[N]=[kg\cdot m/s^2]$を持っている。

（２）　Hamilton の 原理の応用

図2.4に示す例題について、Hamiltonの原理を応用して振動方程式を導く。弾性の運動エネルギーとひずみエネルギーはそれぞれ以下のようになる。

運動エネルギー　$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{2.13a}$$

ひずみエネルギー　$$V=\frac{1}{2}kx^2 \tag{2.13b}$$

ばねに蓄えられるひずみエネルギーは、図2.6に示すように、ばねに関する力ー変位関係の斜線の面積に相当する。

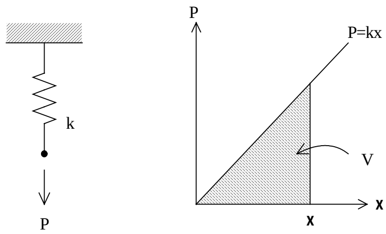


図２．６　ひずみエネルギー

さらに、(2.5)式のδWは非保存力（外力及び減衰力）の変分を表わしていて、この例題の場合には以下のように書ける。

$$\delta W=(P-c\dot{x})\delta x \tag{2.14}$$

これは、δxを仮想変位とした時の外力及び減衰力の仮想仕事を表わしている。

(2.5) 式に(2.13)、(2.14)式を代入すれば、

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}(P-c\dot{x})\delta x dt=0 \tag{2.15}$$

δに関する演算は微分演算と同じように行ってよい。よって、

$$\int_{t_1}^{t_2}(m\dot{x}\delta\dot{x}-kx\delta x)dt+\int_{t_1}^{t_2}(P-c\dot{x})\delta x dt=0 \tag{2.16}$$

左辺第１項の積分は、部分積分によって以下のように変形できる。

$$\int_{t_1}^{t_2}m\dot{x}\delta\dot{x}dt=m\dot{x}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}m\ddot{x}\delta x dt \tag{2.17}$$

上式において、変分δxの与え方は、図2.7に示すように、$t=t_1,t_2$において$\delta x=0$となるように選ぶものとする。したがって、(2.17)式の右辺第１項は０となる。

以上より、(2.14)式は次のように変形できる。

$$\int_{t_1}^{t_2}(-m\ddot{x}-kx)\delta x dt+\int_{t_1}^{t_2}(P-c\dot{x})\delta x dt=0 \qquad (2.18)$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}(-m\ddot{x}-c\dot{x}-kx+P)\delta x dt=0 \qquad (2.19)$$

上式において、δx の選び方は端部を除いて任意であり、(2.19)式が常に成り立つためには、次式が成立することが必要となる。

$$-m\ddot{x}-c\dot{x}-kx+P=0 \qquad (2.20)$$

上式は(2.12)式の振動方程式に一致する。

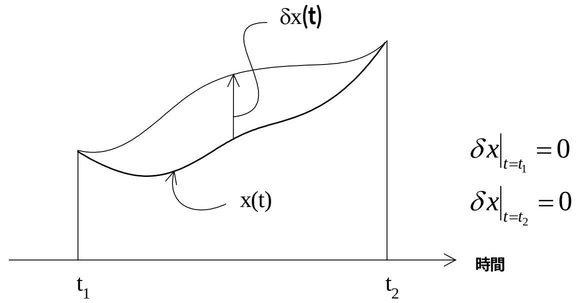


図２.７　変分 $\delta x(t)$ の与え方

（３）Lagrange の 運動方程式の適用例

図 2.4に示す例題について、Lagrangeの運動方程式を応用して振動方程式を導く。各エネルギーを求めれば、

ひずみエネルギー　$V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (2.21a)

運動エネルギー　$T=\frac{1}{2}kx^2$ (2.21b)

外力及び減衰力　$Q=P-c\dot{x}$ (2.21c)

以上の式を(2.7)式に代入すれば、

$$\frac{d}{dt}(m\frac{dx}{dt})+kx=P-c\dot{x} \qquad (2.22)$$

上式を整理すれば、結局次の振動方程式を得る。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+c\dot{x}=P \qquad (2.23)$$

この式も、式(2.12)に一致する。

参考例題： ２重振り子の自由振動

Lagrangeの運動方程式は、多自由度系の振動方程式を得るのに都合が良い。そこで、図2.8に示す２重振り子を例として、振動方程式をLagrangeの運動方程式を利用して求める方法を示す。

運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 \qquad \text{(a)}$$

２つの質点が持つポテンシャルエネルギー（位置のエネルギー）の総和は、

$$V = (m_1 + m_2)(1 - \cos\theta_1) g l_1 + m_2 (1 - \cos\theta_2) g l_2 \qquad \text{(b)}$$

(b)式においてθ_1, θ_2を微少量とすれば、以下の近似式が成り立つ。

$$\cos\theta_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_1^{\,2}, \quad \cos\theta_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^{\,2} \qquad \text{(c)}$$

これを(b)式に代入すれば、ポテンシャルエネルギーは以下のように表せる。

$$V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^{\,2} \qquad \text{(d)}$$

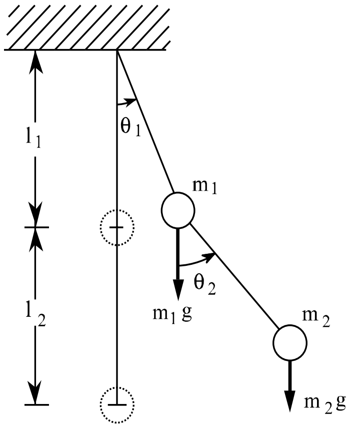


図２．８　２重振り子

(a)、(d)式を(2.7)式のLagrangeの運動方程式に代入する。ただし、代入する際、以下のように変数を置きなおす。

$$q_1 \to \theta_1, \quad q_2 \to \theta_2$$

かくして、振動方程式は以下のようになる。

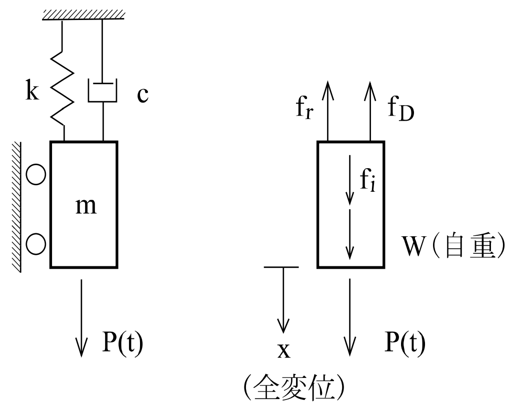
$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^{\,2} & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^{\,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + g \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1 & \cdot \\ \cdot & m_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(e)}$$

または、(e)式を書き直して、

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} \dfrac{g}{l_1} & -\dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{g}{l_1} \\ -\dfrac{m_1 + m_2}{m_1} \dfrac{g}{l_2} & \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} \dfrac{g}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(f)}$$

２．３　自重の取り扱い方

図 2.9(a)には、質量mの質点をばねとダッシュポットで釣り下げた状態が示してある。この状態は、図2.4に新たに自重が加わる分だけ異なる。以下には、図2.9(a)の系についての振動方程式を示し、図2.4の振動方程式と比較する。



（a）　　　　　　（b）質点に作用する力

図２．９　重力を受ける質点の振動

図2.9(b)を参照して質点に作用する力の釣合を考えれば次式を得る。

$$f_i - f_r - f_D + W + P(t) = 0 \tag{2.24}$$

図2.9(b)に示す f_i, f_r, f_D の各力は以下のように表わすことができる。

$$f_r = k \cdot x_T, \quad f_D = c \cdot \dot{x}_T, \quad f_i = -m \cdot \ddot{x}_T$$

これらの力を(2.24)式に代入すれば、振動方程式は以下のようになる。

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}_T + kx_T = W + P(t) \tag{2.25}$$

この式の右辺には、自重の項が含まれている。この項を、式の中から取り除くことが出来ないか考えてみよう。そこで、全変位 x_T を自重による静的変位 X_{st} とそれ以外の変位xとの和として表現してみる。

すなわち、全変位 x_T をつぎのように置く。

$$x_T = X_{st} + x \tag{2.26}$$

ただし、 X_{st} は時間に無関係である。

上式を振動方程式に代入し、 $\dot{X}_{st} = \ddot{X}_{st} = 0$ を考慮すれば、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + kX_{st} = P(t) + W \tag{2.27}$$

さらに、 $kX_{st} = W$ の関係を利用すれば、振動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \tag{2.28}$$

これは、図2.4の状態の振動方程式に一致する。

(2.28)式の結果は次のように解釈できる。

「静的な平衡位置を基準として振動方程式を立てれば、自重による静的変位の影響は振動方程式から排除することが出来る」

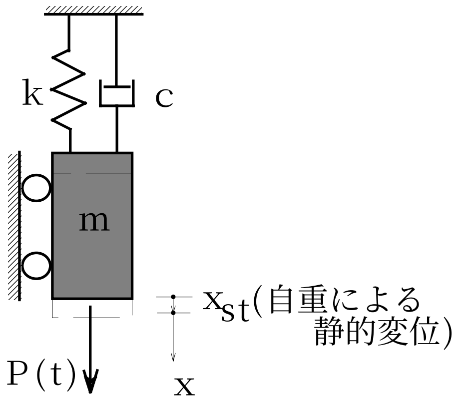
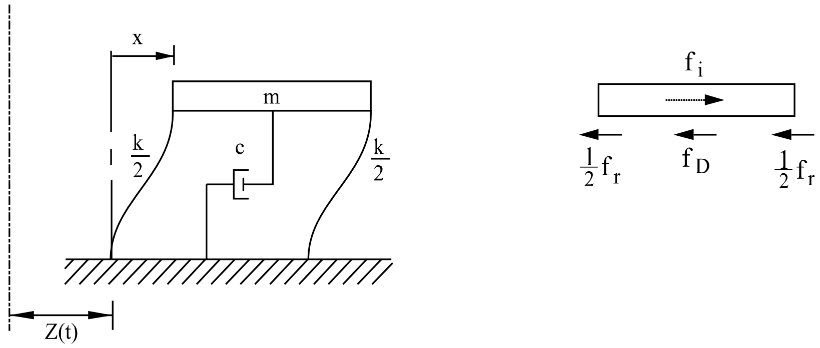


図2.10

２．４　　地動を受ける構造物の振動方程式

図2.11には、地動を受ける１質点の振動モデルが示してある。この構造物の振動方程式を以下に示す。



（a）　　　　　　　　　　　　（b）質点に作用する力

図２．１１　地動を受ける構造物

図2.11(b)を参照して釣合い式を立てれば、以下のようになる。

$$-f_r - f_D + f_i = 0 \tag{2.29}$$

f_i, f_r, f_Dの各力は、以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} f_r &= kx \\ f_D &= c\dot{x} \\ f_i &= -m(\ddot{x} + \ddot{z}) \end{aligned} \tag{2.30}$$

上式を(2.29)式に代入すれば、次の振動方程式を得る。

$$m(\ddot{x} + \ddot{z}) + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.31}$$

または、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z}(t) \tag{2.32}$$

ここで、右辺の$\ddot{z}(t)$は地動の加速度を表わしている。

参考例題：加振力を受ける構造物の振動方程式をもとめ、地動を受ける場合の振動方程式と比較する。

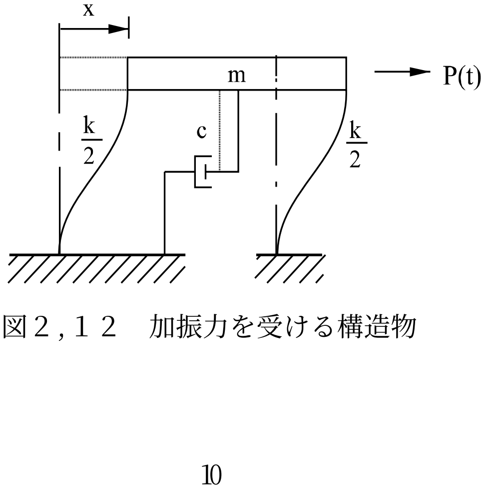


図２，１２　加振力を受ける構造物

図 2.12の振動方程式は、

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P(t) \tag{2.33}$$

(2,31)式と(2.33)式とを比べれば、以下の対応関係があるのが分かる。

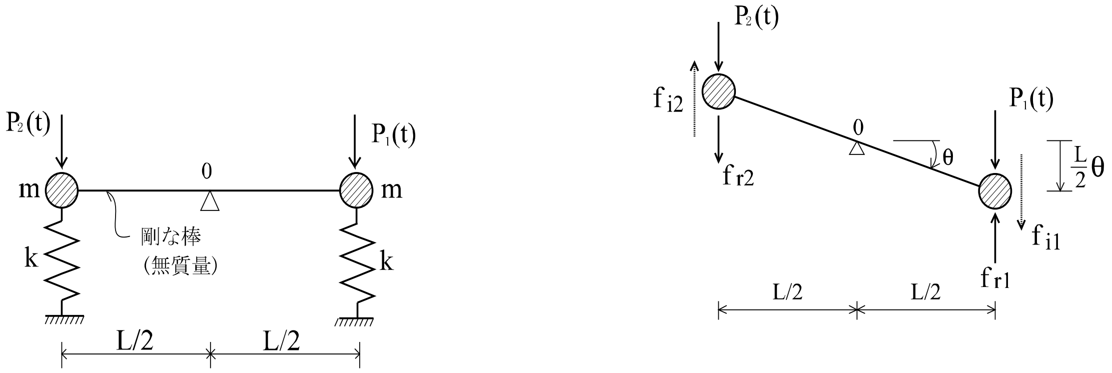
地動の場合　　　　　　　　　加振力の場合

右辺＝$-m\ddot{z}$　　$\longleftrightarrow$　　右辺＝$P(t)$

２．５　回転振動の振動方程式

（ａ）　棒に繋がれた質点の回転振動

図2.13に示す２つの質点は、剛な棒で結ばれていて、0点を中心に回転振動する。以下には、この棒の回転振動の振動方程式を示す。



（ａ）　　　　　　　　　　（ｂ）

図２．１３　例題

図2.13(b)には２つの質点に作用する力が示してある。この図を参考に、0点に関する力のモーメントの釣合いを考えれば、

$$-f_{r1}\frac{L}{2}+f_{i1}\frac{L}{2}+\frac{L}{2}P_1(t)-f_{r2}\frac{L}{2}+f_{i2}\frac{L}{2}-\frac{L}{2}P_2(t)=0 \tag{2.34}$$

ここで、$P_1(t), P_2(t)$は各質点に作用する加振力を表わし、他の力は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f_{r1} &= f_{r2}=\frac{L}{2}\theta k \\ f_{i1} &= f_{i2}=-\frac{L}{2}\ddot{\theta}m \end{aligned} \tag{2.35}$$

(2.35)式を(2.34)式に代入すれば、次の振動方程式を得る。

$$-\frac{L^2}{2}m\ddot{\theta}-\frac{L^2}{2}k\theta+\frac{L}{2}\left[P_1(t)-P_2(t)\right]=0 \tag{2.36}$$

上式において、慣性モーメントをI、回転ばね定数をK_θ、加振モーメントを$M(t)$と置く。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2}m &= I \\ \frac{L^2}{2}k &= K_\theta \\ \frac{L}{2}\left[P_1(t)-P_2(t)\right] &= M(t) \end{aligned} \tag{2.37}$$

これらの記号を用いれば、(2.36)式は次のように書ける。

$$-I\ddot{\theta}-K_{\theta}\,\theta+M(t)=0 \tag{2.38}$$

(2.38)式は次のことを意味している。

「回転運動に伴って物体には$-I\ddot{\theta}$の慣性モーメントが発生し、これと剛体に

作用する力のモーメントの総和とが釣合う。」

以上の内容は、図2.14のようにまとめることができる。

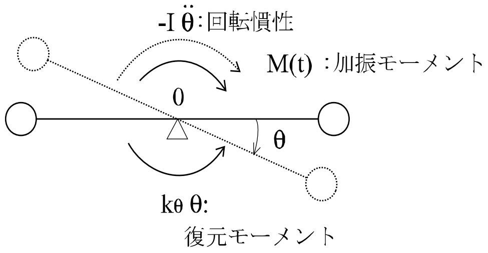


図２．１４

（ｂ）　剛体棒のロッキング振動

図2.15(a)に示す剛な棒が0点を中心に回転振動する時の振動方程式を求める。棒に作用する力は、図2.15(b)に示してある。この図(b)を参考に0点での力のモーメントの釣合を考えれば、次式を得る。

$$\frac{L}{2}f_{iH}+f_{iM}-f_{r\theta}+\frac{L}{2}\theta W+M(t)=0 \tag{2.39}$$

上式の各力は次のように表現できる。

$$f_{iH}=-\frac{L}{2}\ddot{\theta}m \tag{2.40a}$$
$$f_{iM}=-I_o\ddot{\theta}$$

$$f_{r\theta}=K_{\theta}\theta$$
$$M(t)=LP(t) \tag{2.40b}$$

ここで、I_oは棒の重心位置Gに関する慣性モーメントを表わす。

$$I_o=\frac{\rho}{12}L^3=\frac{1}{12}mL^2 \tag{2.41}$$

(2.41)式において、ρは単位長さ当たりの棒の質量、mは棒の全質量($m=\rho L$)を表わす。

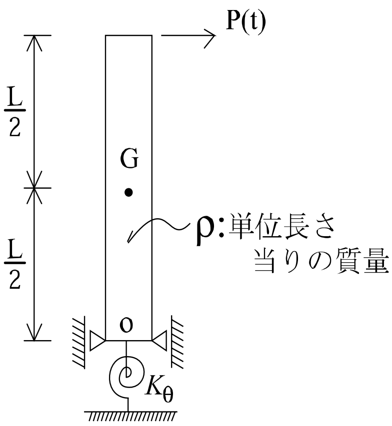
(2.40)式を(2.39)式に代入すれば、次の振動方程式を得る。

$$I\ddot{\theta}+(K_{\theta}-\frac{L}{2}W)\theta=M(t) \tag{2.42}$$

ここで、

$$I=I_o+m\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}mL^2 \tag{2.43}$$

Iは棒の回転中心0点に関する慣性モーメントを表わす。



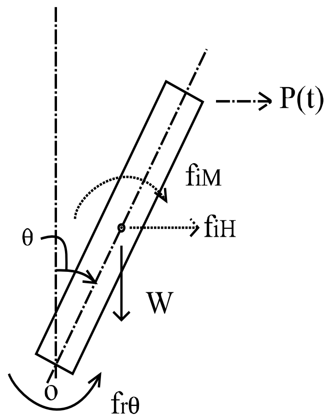


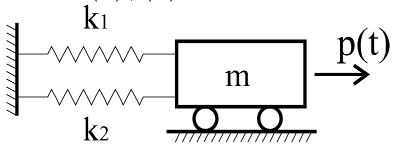
図２．１５　力のモーメントの釣合い

（ｃ）　慣性モーメント[5]

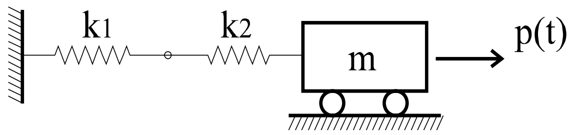
5　慣性モーメント＝Mass moment of inertia.

練 習 問 題

1．図(a),(b)に示す系の振動方程式を書け。

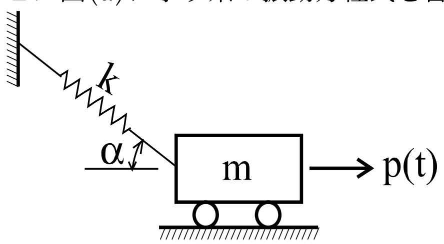


（a）

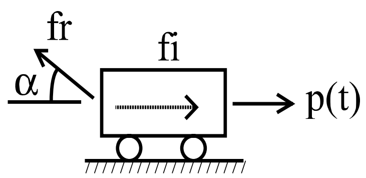


（b）

2．図(a)に示す系の振動方程式を書け。

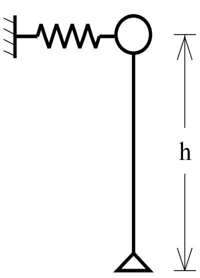


（a）

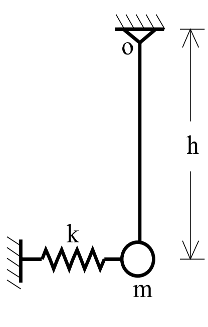


（b）ヒント（質点に作用する力）

3．図(a),(b)に示す倒立振り子および釣り下げ振り子の振動方程式を示し、両者の結果を比較せよ。

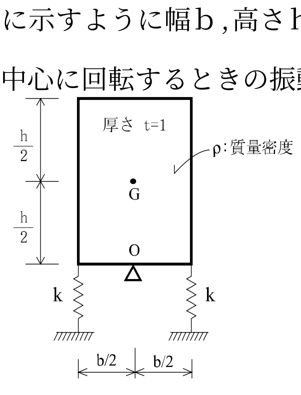


(a)

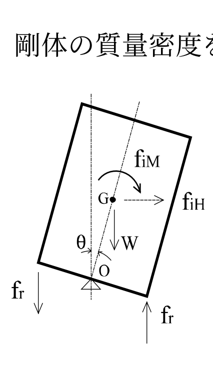


(b)

4．図(a)に示すように幅ｂ,高さｈ,厚さｔ(ｔ=1)の剛体がばねで支えられている。この剛体が0点を中心に回転するときの振動方程式を書け。ただし、剛体の質量密度をρとする。

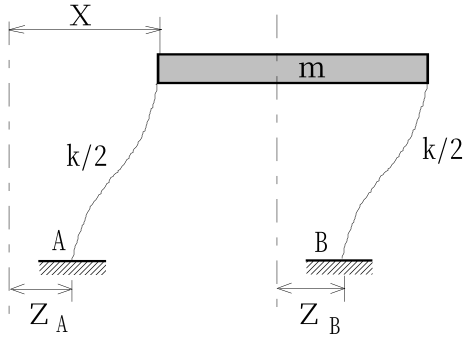


（a）

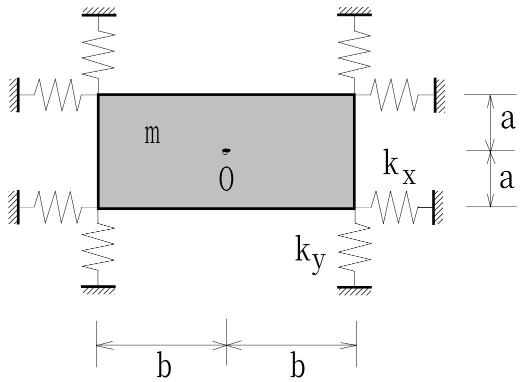


（b）

５．図に示す構造物の柱脚Ａ，Ｂ点がそれぞれ Z_A, Z_B の異なる水平地動を受けるものする。この時の振動方程式を書け。



６．図に示す剛体が0点を中心に回転運動する時の振動方程式を示せ。ただし、各隅のｘ方向の水平ばねを k_x、ｙ方向ばねを k_y とし、剛体の質量をmとする。

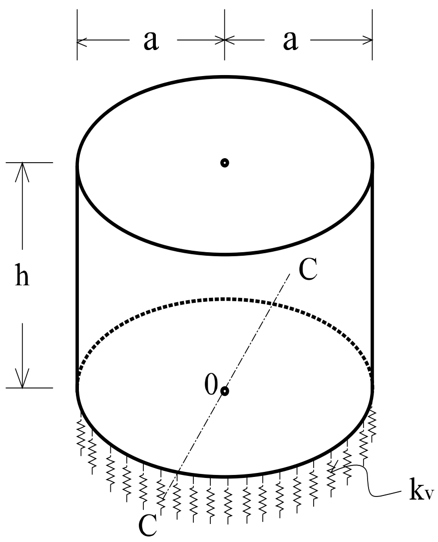


７．図に示す円筒形基礎が垂直地盤係数 k_V $[N/cm^3]$ のばねに支えられている。ばねは基礎底面に一様に分布しているものとし、この基礎がC−C 軸を中心に回転振動する。この基礎の運動について以下の問に答えよ。

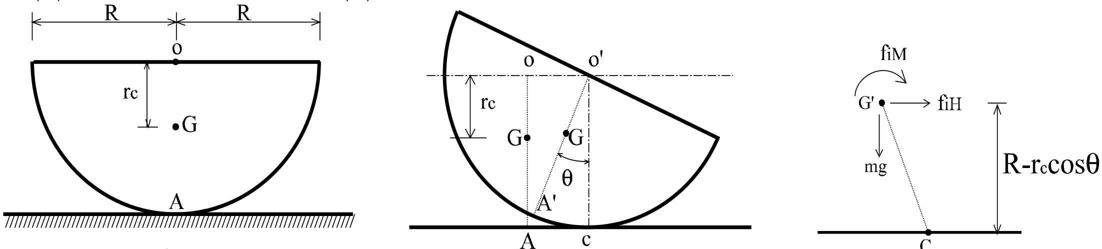
(1) 円筒形基礎の単位体積質量をρとして、この基礎のC−C 軸に関する慣性モーメントを求めよ。

(2) 地盤ばねの回転剛性 K_θ を求めよ。

(3) この基礎のC−C 軸に関する振動方程式を書け。



８．図(a)に示す半径Ｒの半円形の平板が水平面上で滑ることなく回転振動する。この運動の振動方程式を書け。ただし、平板の全質量をｍとする。（ヒント：重心の運動に着目する。図(b)には運動の状態が、図(c)には重心に作用する力が示してある）

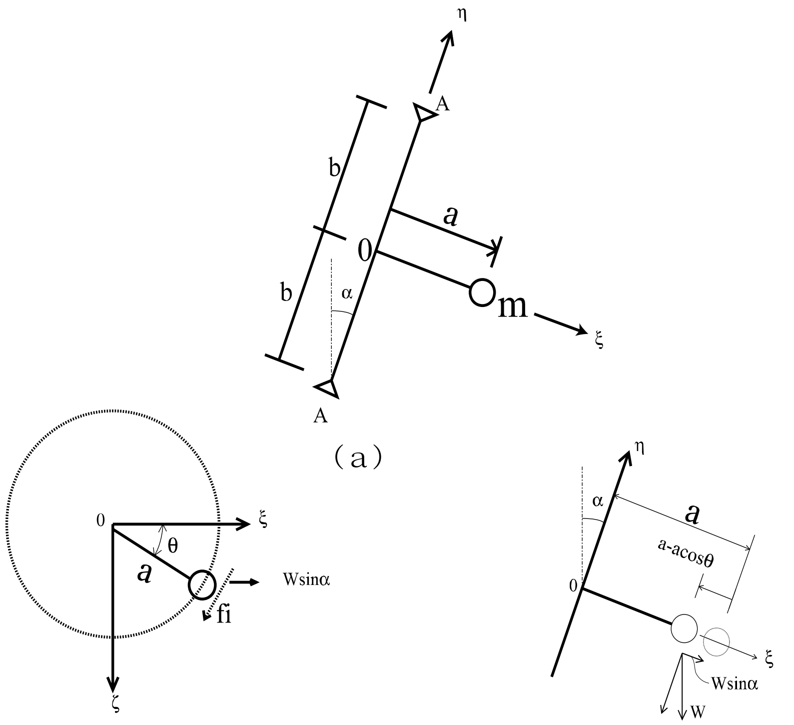


$$r_c = \frac{4}{3\pi}R$$

$$I_G = \left(\frac{1}{2}R^2 - r_c^2\right)$$

（a）　　　　　　（b）　　　　　　（c）

９．図(a)に示す振り子はA－Aを軸にねじれ振動する。このねじれ振り子の質量をｍとして、振動方程式を示せ。（ヒント：図(b)には斜め上から見た運動の状態が、図(c)には質点に作用する力が示してある）



（a）

（b）　　　　　　（c）