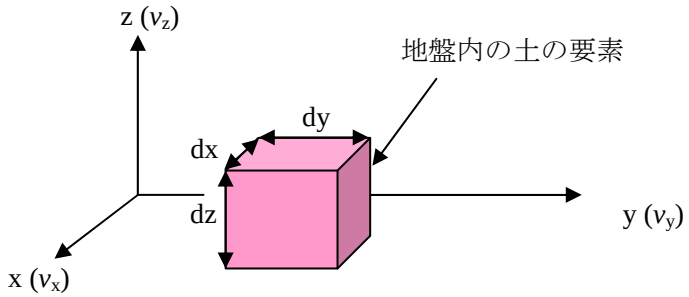
４．４ 地下水の流れ

４．４．１ 連続の方程式



座標（その方向の流速）

○水の密度は、時間的空間的に一定とする。
○流れは、時間的に一定であるとする（定常流）。
従って、要素内の時間増分 dt の間の、沸き出しや吸水による間隙水の量の変化＝０
単位時間当たりの各方向で直交する面を通過する「流出量」―「流入量」の差をとると、

$$\left[\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot dx\right)-v_x\right]\cdot dy\cdot dz\cdot dt+\left[\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial y}\cdot dy\right)-v_y\right]\cdot dz\cdot dx\cdot dt$$
$$+\left[\left(v_z+\frac{\partial v_z}{\partial z}\cdot dx\right)-v_z\right]\cdot dx\cdot dy\cdot dt=0$$

従って、 $\dfrac{\partial(v_x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(v_y)}{\partial y}+\dfrac{\partial(v_z)}{\partial z}=0$ (4.34)

一方、 等方的な透水特性を仮定して、透水係数 k が方向に依らないとすると、

$$v_x=k\cdot i_x=-k\cdot\partial h/\partial x$$
$$v_y=k\cdot i_y=-k\cdot\partial h/\partial y \qquad (4.35)$$
$$v_z=k\cdot i_z=-k\cdot\partial h/\partial z$$

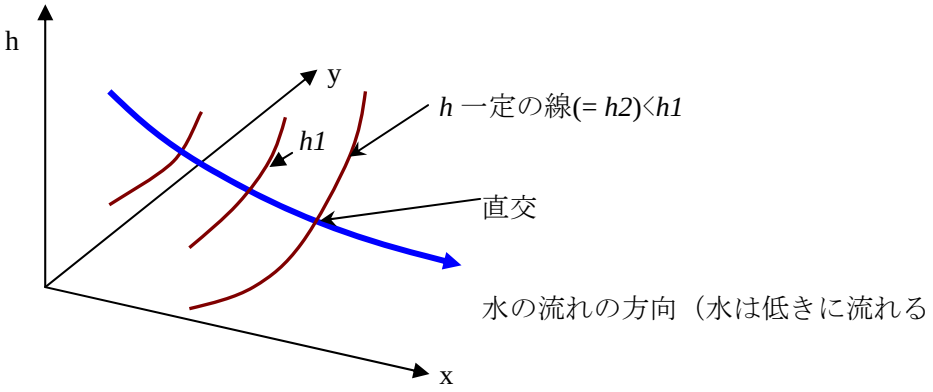
(4.35)式を(4.34)式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0:\quad \text{Laplace の方程式} \qquad (4.36)$$

定常流の場合は、水頭 h は(4.36)式を満足する。

４．４．２ 二次元の定常流（ｘ－ｙ面）

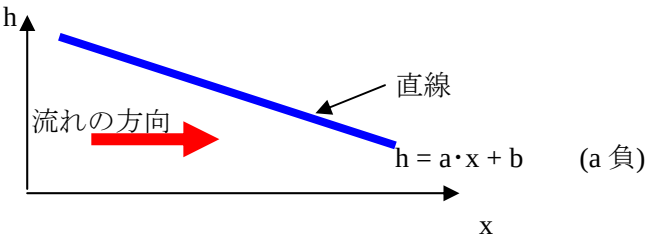
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}=0 \qquad (4.38)$$



(4.38)式を満足する式の例。

1)一次元の定常流： $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$:

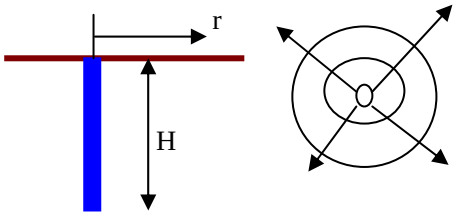
解）



2)一点からの水平面の全方向に対して定常流出

総流量 $Q = H \cdot 2\pi r \cdot v_r = const.$

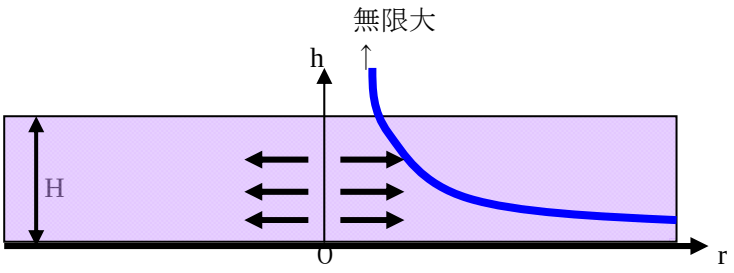
$$v_r = \frac{Q}{H \cdot 2\pi r} = k \cdot i = k \cdot (-\frac{\partial h}{\partial r})$$



$$\frac{\partial h}{\partial (\ln r)} = -\frac{Q}{H \cdot 2\pi k}$$

$$h = -\frac{Q}{H \cdot 2\pi k} \cdot \ln r + C = -\frac{Q}{H \cdot 2\pi k} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$$

この解も、$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} = 0$ を満足している。



今、

$$\phi(x,y) = -k \cdot h(x,y)$$

とすると、地盤の物性（透水係数 k）に独立の式が得られる。従って、この式の解は、個々の現場で物性（k）が異なる場合に対して適用できる（便利である）。$\phi(x,y)$ を**ポテンシャル関数**と呼ぶ。

すると、平均流速は次式から求まる。

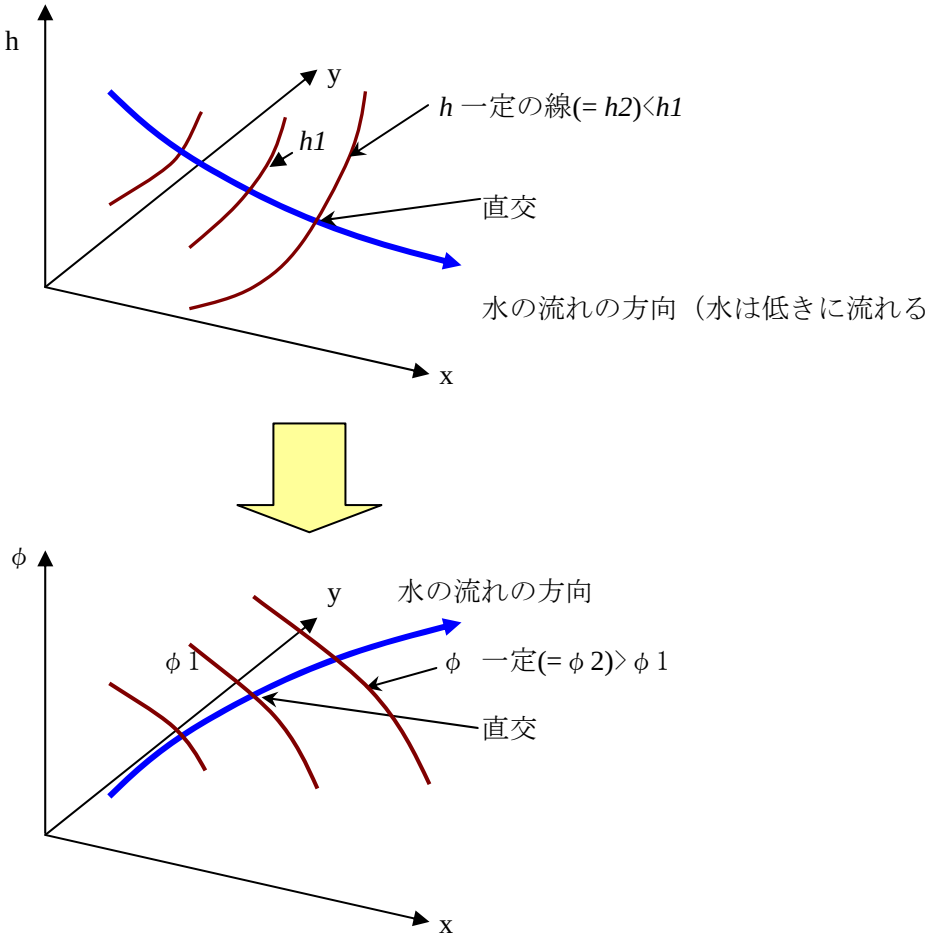
$$v_x = k \cdot i_x = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v_y = k \cdot i_y = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

(4.34)式を参照して、二次元状態では次式が得られる。

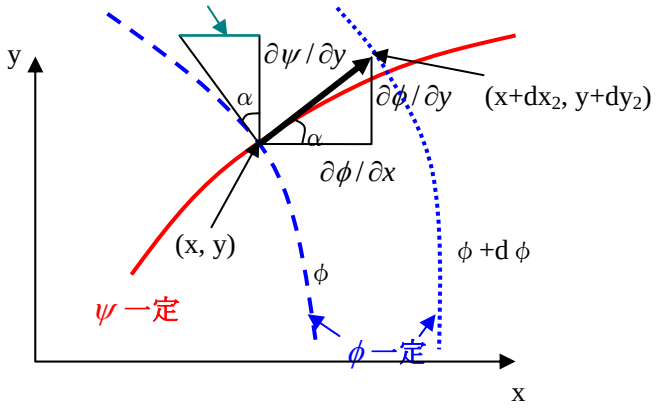
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0 \qquad (4.38)$$

ϕ が増加する方向に流れる。

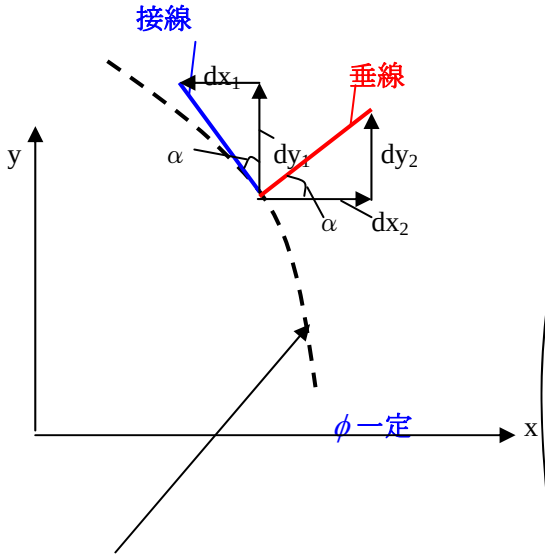


ϕ 一定の線に直交の線に沿って ψ が一定とすると、その方向に地下水は流れる。

$-\partial\psi/\partial x$ （負の符号がついて正となり、長さを表す）



証明



直交の条件から、

$$\tan\alpha = \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{dx_1}{dy_1}$$

$$v_x = k \cdot i_x = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v_y = k \cdot i_y = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

この線に沿って、$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot dy_1 = 0$ ； 従って、$\tan\alpha = \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{v_y}{v_x}$

$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{v_y}{v_x}$ であるので、ψ 一定の線は流れの方向と一致する（**流線；　flow line**）。

ψ を**流れ関数と呼ぶ。**流線に沿って；$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy_2 = 0$ である。

従って、$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}$

従って、$\tan\alpha = \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{dx_1}{dy_1} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{v_y}{v_x}$

従って、流速とポテンシャル関数 ϕ と流れ関数 ψ との関係は、以下のようになる。

$$v_x = c \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = -c \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (4.42)$$

C= 1.0 なので、

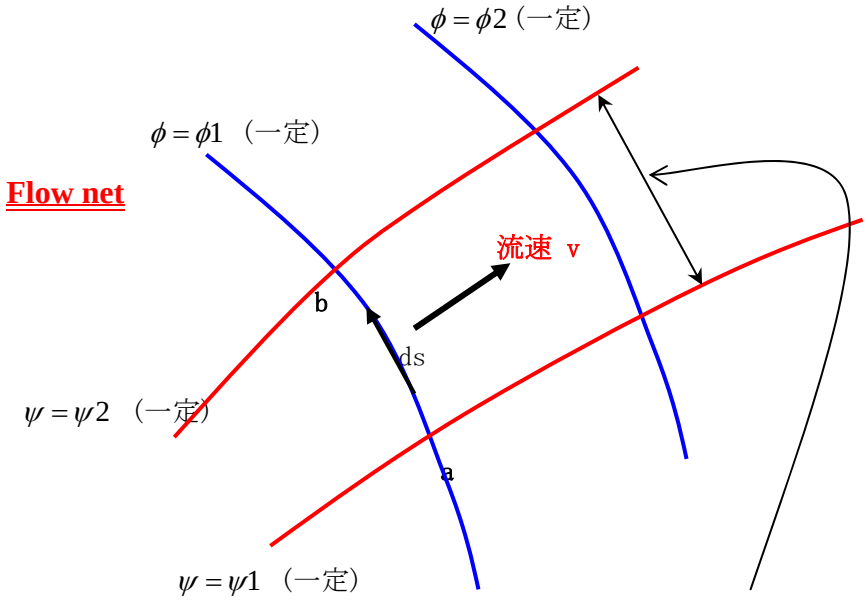
$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (4.43)$$

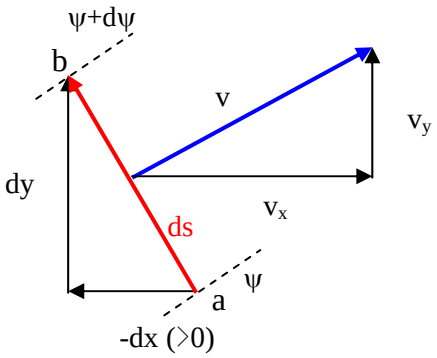
また、定常流に対しては、ϕ も $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0$ を満足する。

なぜならば、$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0$ (4.38)

ϕとψは直交関数

ψ ：流れ関数の意味





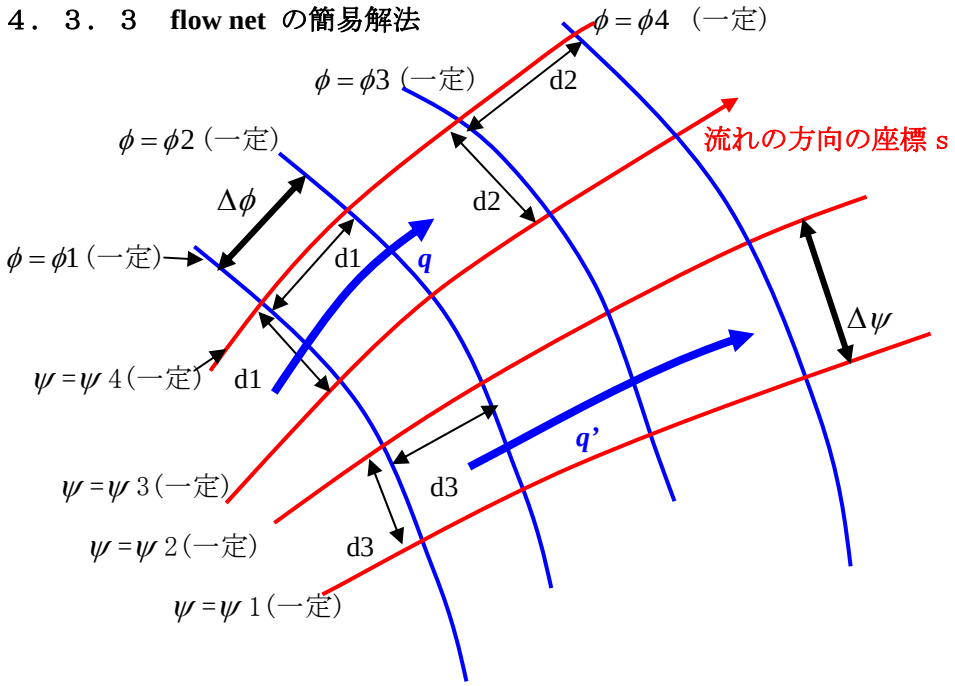
この二つの流線の間を流れる水の量は、

点 a と点 b の間の次の積分値に等しい：

$$q = \int_a^b v \cdot ds = \int \left(v_x \cdot dy + v_y \cdot (-dx) \right)$$
$$= \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot (-dx) \right) \qquad (4.49)$$
$$= \int d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

つまり、flow net を作れば、地下水の流れ方（方向、流量）、流速の分布、水圧、head の分布が分かる。

４．３．３　flow net の簡易解法



●流線の等 potential 線の作る flow net の全ての要素が、**正方形**に近いようにする。

法則１：

$$\left.\begin{aligned} q=d1\cdot v_s=d1\cdot\frac{\partial\phi}{\partial s}=d1\cdot\frac{\phi2-\phi1}{d1}=\phi2-\phi1 \\ q=d2\cdot v_s=d2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial s}=d2\cdot\frac{\phi4-\phi3}{d2}=\phi4-\phi3 \end{aligned}\right\}\quad q=\Delta\phi$$

従って、 $\phi2-\phi1=\phi4-\phi3$ → h2 - h1= h4 - h3

→相隣り合う等 potential 線間の水頭損失(−Δh)、あるいは potential 量の変化(Δφ)は、流線に沿って一定。

法則２：

$$q'=d3\cdot v_s=d3\cdot\frac{\partial\phi}{\partial s}=d3\cdot\frac{\phi2-\phi1}{d3}=\phi2-\phi1\ ;\quad q=d1\cdot v_s=d1\cdot\frac{\partial\phi}{\partial s}=d1\cdot\frac{\phi2-\phi1}{d1}=\phi2-\phi1$$

つまり、相隣り合う流線間のチャンネル内の流水量は、チャンネルの位置によらず等しい。

つまり、 $q=q'$

一方、(4.49)式（前頁）から $q=\Delta\psi$

$$\left.\begin{aligned} q=\psi4-\psi3 \\ q'=\psi2-\psi1 \end{aligned}\right\}$$

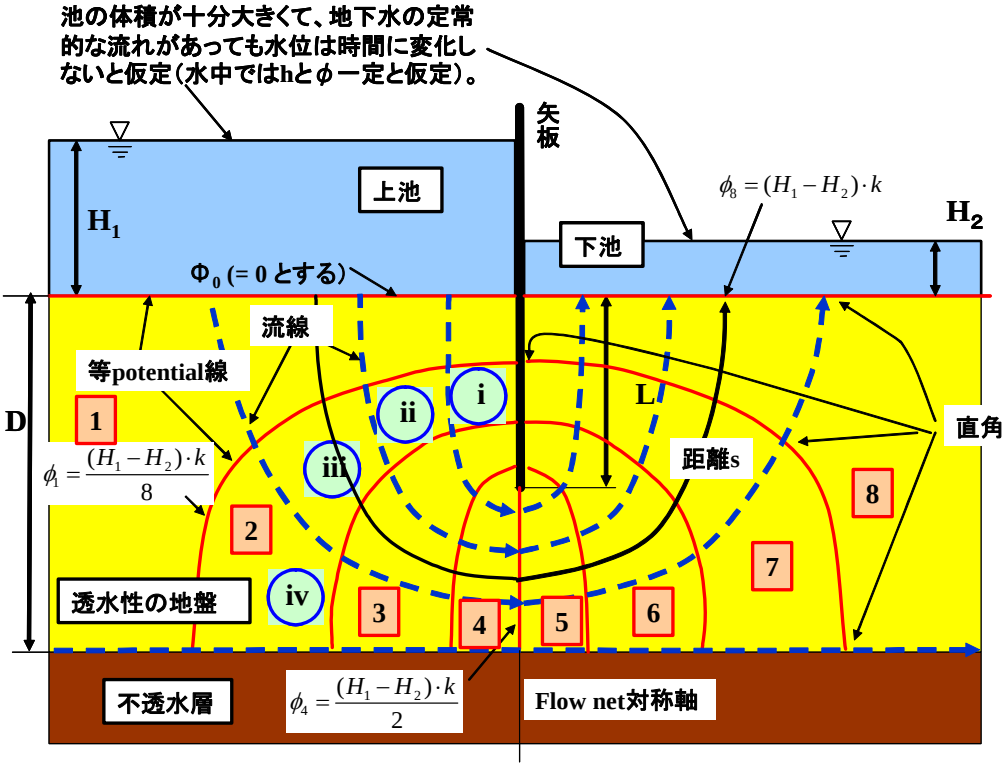
従って、 $\psi4-\psi3=\psi2-\psi1$

相隣り合う流線間の流水量は $q=\Delta\psi$ であり、それは等 potential 線に沿って一定。

■以上をまとめると、$q=q'=\Delta\phi=\Delta\psi$

Flow net の活用の例：

二次元状態で、透水性の地盤に打ち込まれた池を形成している鉛直矢板。



注：

1) $\phi(x, y) = -k \cdot h(x, y)$.

2)i → ii→ iii → iv の方向に動くと、少しずつ矢板から遠くなり、対称軸からはずれてゆき流速が遅くなるために動水勾配は小さくなり等ポテンシャル線の間隔が広まるので、流線との位置によって異ならない正方形の flow net を作成するためには、流線の間隔を少しずつ広くする。

つまり、a)流速 $v = \frac{\partial \phi}{\partial s}$ (s は流線に沿っての距離)は矢板から離れるほど小さい。

b) 逆に、矢板の先端で流速 $v = \frac{\partial \phi}{\partial s}$ が一番早い。

3)等 potential 線に仕切られた区画（1～8）の数 N_d= 8。

流線に仕切られた区画（ⓘ～ⓘⓥ）の数 N_f= 4。

従って、隣り合う potential 線間の水頭の減少分は、**法則性 1** から、 $\Delta h = \frac{(H_1 - H_2)}{N_d}$。

従って、隣り合う potential 線間の potential の変化分は、 $\Delta \phi = \frac{(H_1 - H_2)\cdot k}{N_d}$

法則性２から隣り合う２本の流線間の流量は、 $q = \Delta \phi = \Delta \psi = k \cdot \Delta h = k \cdot \frac{H_1 - H_2}{N_d}$。

従って、総流量は$Q = q \cdot N_f = k \cdot (H_1 - H_2) \cdot \frac{N_f}{N_d} = k \cdot (H_1 - H_2) \cdot \frac{4}{8} = k \cdot \frac{H_1 - H_2}{2}$。

この式から、次のことが分かる。

a) 総流量 Q は、透水係数が大きいほど多い。

b) 総流量 Q は、水位差 H_1-H_2 が大きいほど多い。

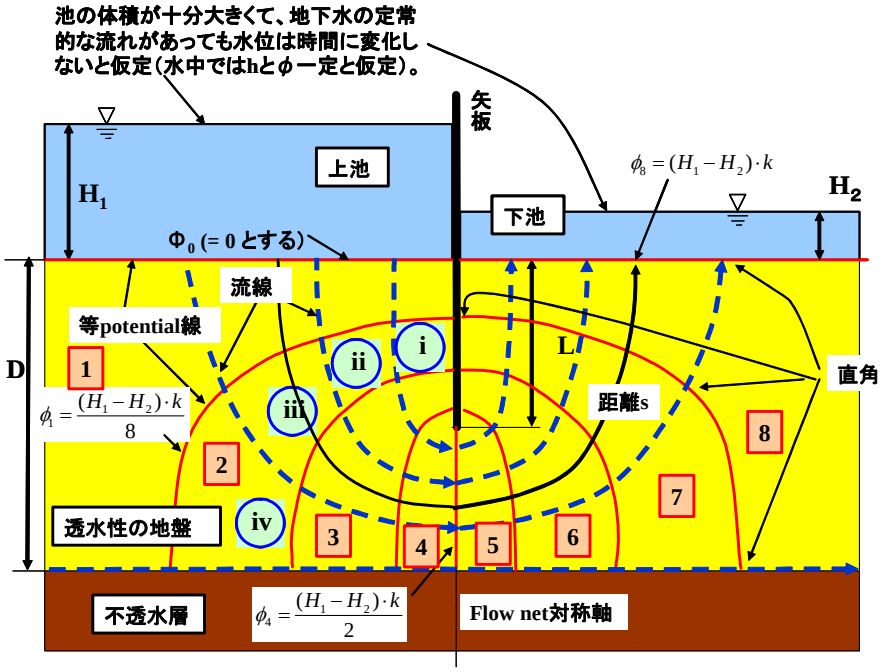
c) 総流量 Q は、$\frac{N_f}{N_d}$ が大きいほど多い。

地下水の流れ演習[1]:

下図のように二次元の定常流がある場合、

1)矢板の深さ L が変化した時、地下水の流量はどのように変化するのか、示せ。

2)地下水の流れが生じたことにより有効応力が最も大きく低下して、破壊が最も生じやすくなる場所を示せ。



1)の答

$\frac{N_f}{N_d}$ は $\frac{\text{（矢板先端と不透水層面までの距離）}D-L}{\text{（矢板の地盤内への打ち込み長さの２倍）}2L}$ にほぼ比例する。

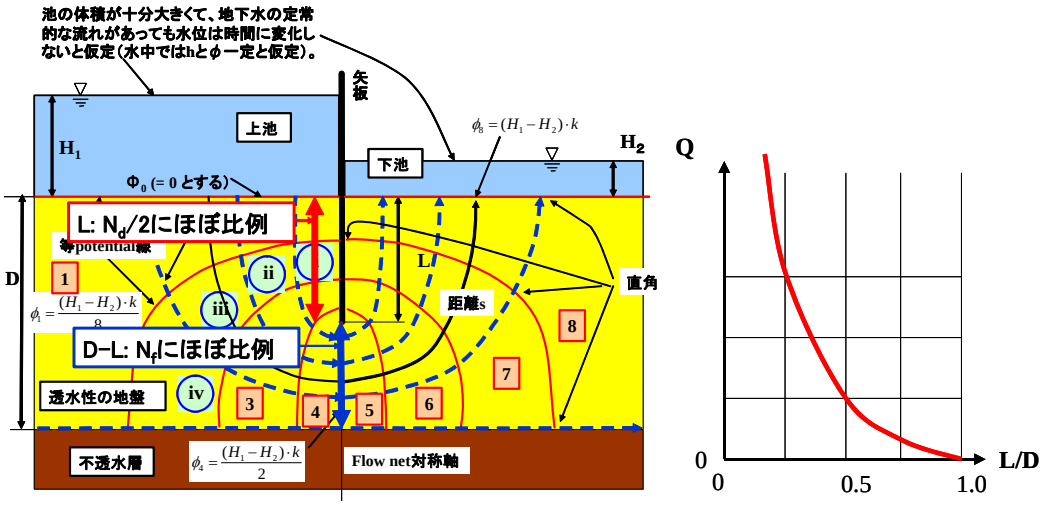
$\frac{L}{D}$: 1.0, 3/4 1/2 1/4 , 0.0

$\frac{D-L}{2L}=\frac{D}{2L}-0.5$: 0.0, 0.17, 0.5, 1.5, 無限大[+]

$=\frac{1}{L/D-1}-1$

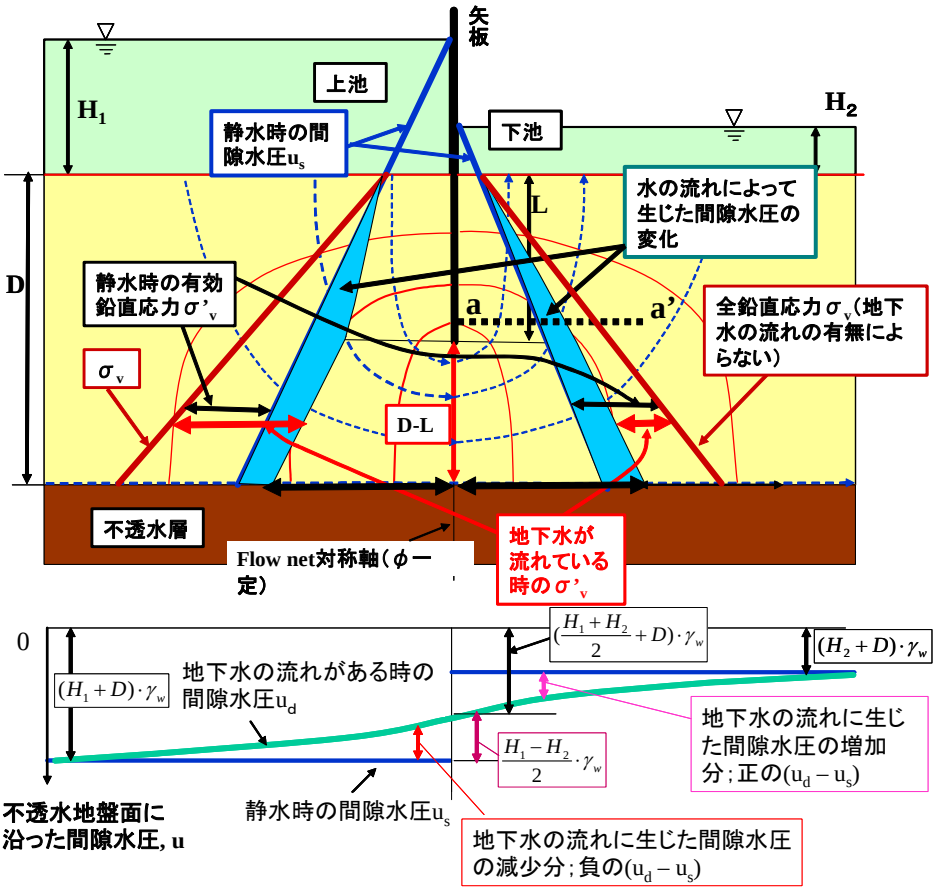
([+]: 実際の流量は無限大にはならない)

流量 Q は、L/D の変化対して敏感である。



2 の答）

矢板（即ちflow net対称軸）に沿っての全鉛直応力、有効鉛直応力、間隙水圧と地下水の流れによる変化量の分布



1) 地下水が流れることにより、

a) 上池側は、間隙水圧が減少して有効応力が**増加**。

b) 下池側は、間隙水圧が増加して有効応力が**減少**。

2) 矢板先端と不透水層の間の(D-L)の鉛直距離の間はφと水頭 h は一定なので、地下水に流れが生じたことによる間隙水圧の変化量は一定であり、$-\frac{\gamma_w}{k}\cdot\phi_4=\frac{H_1-H_2}{2}\cdot\gamma_w$ に等しい。なぜならば、

a)定義から、$\frac{\partial\phi}{\partial s}=-k\cdot\frac{\partial h}{\partial s}=-k\cdot(-i)=k\cdot i=k\cdot\frac{\partial(u_d-u_s)/\gamma_w}{\partial s}$ なので、

b)矢板の沿った任意の場所（流線に沿っての座標 s）での流れのある時の水圧の変化量は、

$$u_d-u_s=\frac{\gamma_w}{k}\cdot\int_{s=0}^{s}\frac{\partial\phi}{\partial s}\cdot ds=\frac{\gamma_w}{k}\cdot\phi$$

従って、φが同一の等ポテンシャル線に沿って、間隙水圧の変化量（u_d-u_s）は一定になる。

3) 地下水の流れにより、最も有効応力が小さくなり、最も boiling の危険がある場所はどこか？

a) 矢板の下流面に沿っては、間隙水圧が増加しているので有効応力が減少している。

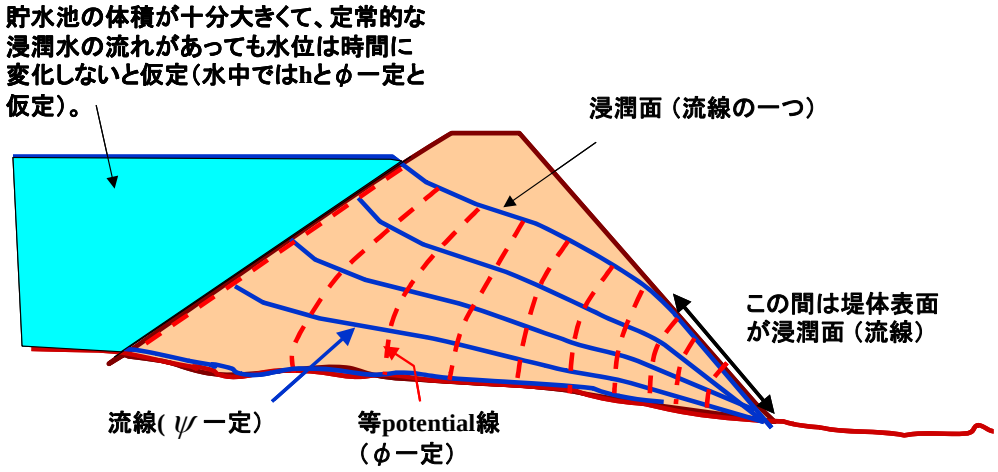
b) a-a'線に沿って水平に見ると、矢板に近づくと間隙水圧の増加量が増えて、有効応力の

減少量が大きくなる。

c) 従って、矢板の下流面に沿って有効応力がゼロに近づく可能性が高い。矢板の下流側目面に沿って地盤が破壊される可能性が大きい。東京湾横断道路川崎側人工島でも、この位置から湧水がまず始まった。

４．５　　浸潤面を持つ地下水流

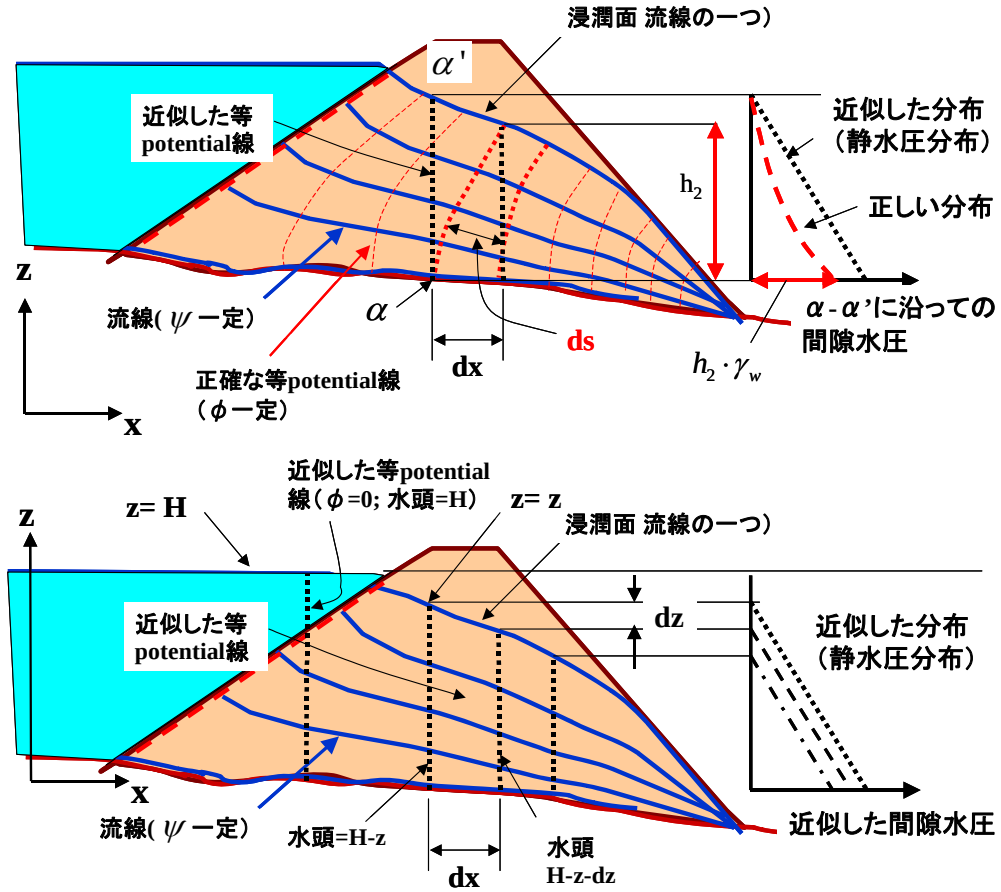
4.5.1　Dupuit の仮定



この flow net を作るのは複雑

⇒以下、Flow net を作って流量を求めるのではなく、近似的な方法で解く。

等potential面が鉛直であると仮定。
即ち、鉛直方向の流れの成分がゼロであると仮定。



動水勾配 i が z 方向で一定と仮定していることと同じ。
従って、平均流速 v は、z 方向で一定と仮定している。

従って、次の近似がなりたつ。浸潤面は流線の一つなので、z を浸潤面の高さとして

$$\text{流速 } v = k \cdot i = -k \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_{\text{(流線に沿って)}} = -k \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_{\text{(浸潤面に沿って)}} \approx -k \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\text{(水平方向に見て)}} \quad (1)$$

従って、単位幅あたりの総流量は、

$$Q = v \cdot z \approx -k \cdot z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{\partial z^2}{\partial x} \right) \quad (2)$$

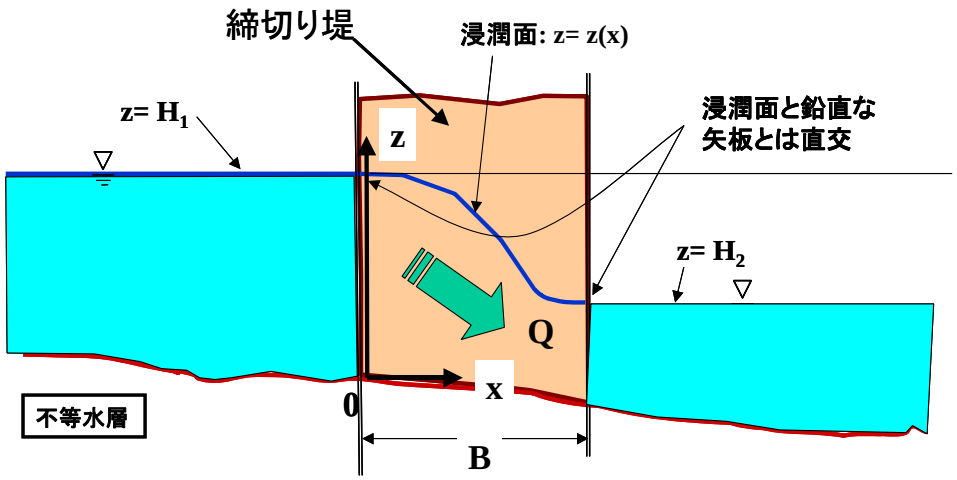
x に対して Q は一定なので、両辺を x に対して積分すると次式が得られる。

$$Q \cdot x = -\frac{k}{2} z^2 + C' \ ; \quad z^2 = -\frac{2Q}{k} \cdot x + C \quad (3)$$

ここで、C は境界条件で決まる未定係数。

地下水の流れ演習[2]

下図のように左右の境界条件を持つ矢板と盛土で作成した締め切り堤を通過する水量を求めよ。矢板の遮水性は無視する]。



答)

$$z^2 = -\frac{2Q}{k}\cdot x + C \qquad \text{(a)}$$

(a)式に、境界条件「x= 0 の時 z= H_1」を代入すると、$(H_1)^2 = -0 + C$ が得られる。従って、

$$z^2 = -\frac{2Q}{k}\cdot x + (H_1)^2 \qquad \text{(b)}$$

(b)式に、境界条件「x= B の時 z= H_2」を代入すると

$$(H_2)^2 = -\frac{2Q}{k}\cdot B + (H_1)^2 \qquad \text{(d)}$$

$$Q = \frac{k}{2B}\cdot\left\{(H_1)^2 - (H_2)^2\right\} \qquad \text{(e)}$$

すなわち、

1) 流量 Q は、 H_1 と H_1 の差が大きいほど多い。

2) 流量 Q は、 締切り堤の幅 B に反比例する。

次に、アースフィルダム(earth fill dam)や堤防内を通過する単位幅あたりの流量 Q を求める。

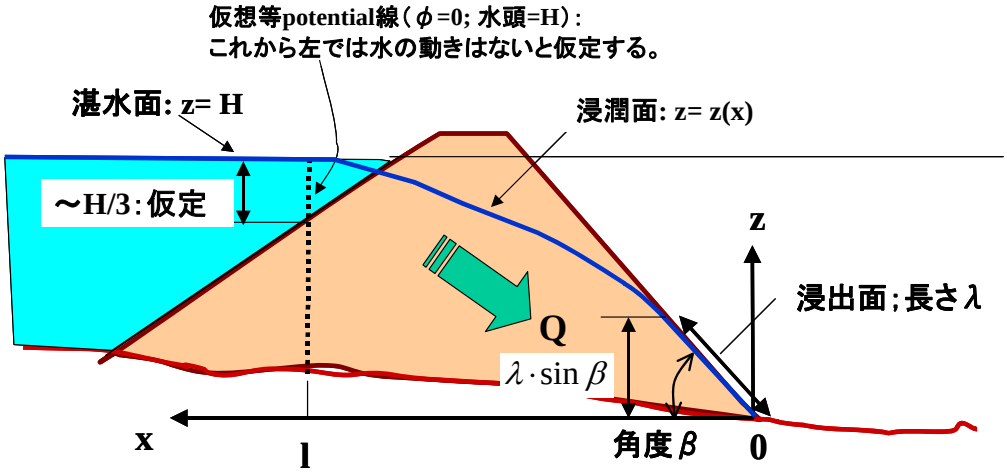
解析の便利さから、x 座標を下図のようにとると、

$$Q = v \cdot z \approx k \cdot z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{\partial z^2}{\partial x} \right) \qquad (5)$$

x に対して Q は一定なので、両辺を x に対して積分すると、

$$z^2 = \frac{2Q}{k} \cdot x + C \qquad (6)$$

C は境界条件で決まる未定係数。



次に、境界条件を利用して(6)式を解く。

(1) x=l の時、水頭 h= H とする。今、座標 l は上図のように仮定することにより求める。すると、

$$H^2 = \frac{2Q}{k} \cdot l + C \qquad (7a)$$

$$C = H^2 - \frac{2Q}{k} \cdot l \qquad (7b)$$

従って、$z^2 = \frac{2Q}{k} \cdot (x - l) + H^2$ (7c)

(2) 浸出面の長さλを求める。

浸出面の上端では $z = \lambda \cdot \sin\beta$ 、 $x = \lambda \cdot \cos\beta$ となるので、これを(7c)式に代入すると、

$$\lambda^2 \cdot \sin\beta^2 = \frac{2Q}{k} \cdot (\lambda \cdot \cos\beta - l) + H^2 \qquad (8)$$

$z = \lambda \cdot \sin\beta$ の時、浸潤面と浸出面は平行であるので $\frac{\partial z}{\partial x} = \tan\beta$ となっているので、これを(5)式に代入すると、

$$Q = k \cdot z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = k \cdot \lambda \cdot \sin\beta \cdot \tan\beta \qquad (9)$$

(8), (9)式をλに対して解くと、

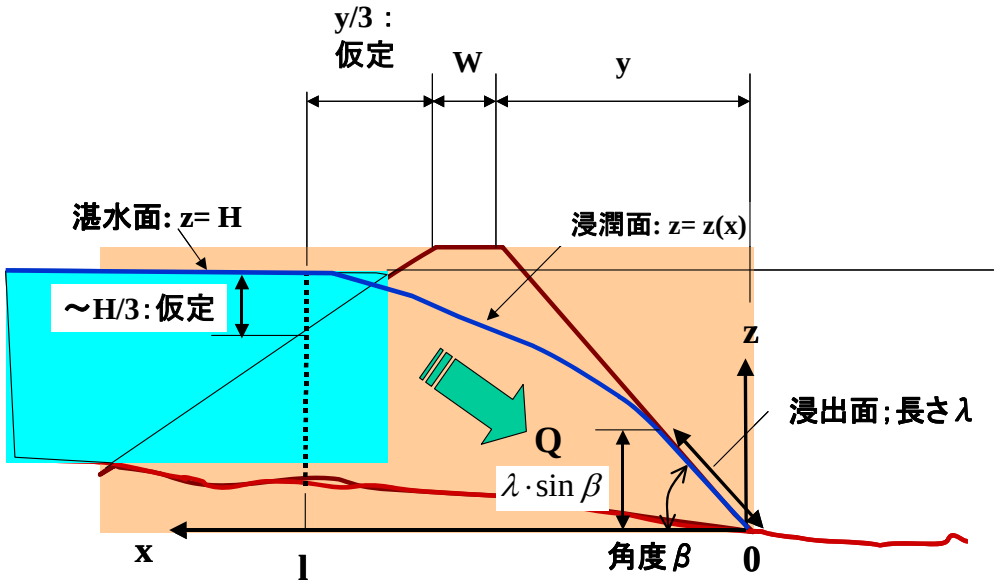
$$\lambda^2 \cdot \sin^2\beta = 2 \cdot \lambda \cdot \sin\beta \cdot \tan\beta \cdot (\lambda \cdot \cos\beta - l) + H^2 \qquad (10a)$$

$$\lambda^2 - \frac{2 \cdot l}{\cos\beta}\lambda + \frac{H^2}{\sin^2\beta} = 0 \qquad (10b)$$

$$\lambda = \frac{l}{\cos\beta} - \sqrt{\frac{l^2}{\cos^2\beta} - \frac{H^2}{\sin^2\beta}} = \frac{l}{\cos\beta} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(H/l)^2}{\tan^2\beta}} \right] \qquad (10c)$$

これを、(9)式に代入すると、

$$Q = k \cdot \frac{l}{\cos\beta} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(H/l)^2}{\tan^2\beta}} \right] \cdot \sin\beta \cdot \tan\beta = k \cdot l \cdot \tan^2\beta \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(H/l)^2}{\tan^2\beta}} \right] \qquad (11)$$



ここで解の意味が分かり易いように、上図の記号を用いると、

$$\tan\beta = H/y \text{、} \frac{(H/l)^2}{\tan^2\beta} = \frac{(H/l)^2}{(H/y)^2} = \left(\frac{y}{l} \right)^2$$

$$l = \frac{4}{3} \cdot y + W \text{、即ち、} \frac{l}{y} = \frac{4}{3} + \frac{W}{y} \text{あるいは} \frac{y}{l} = \frac{1}{4/3 + W/y}$$

となるので、　(11)式は

$$Q = k \cdot l \cdot \tan^2\beta \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2} \right] = k \cdot y \cdot \tan^2\beta \cdot \frac{l}{y} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2} \right]$$

$$= k \cdot H \cdot \tan\beta \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{W}{y} \right) \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4/3 + W/y} \right)^2} \right] \qquad (12)$$

W が y に対して相対的に小さくて、$\frac{W}{y} \approx 0.0$ と近似できる時は、(12)式は、

$$Q = k \cdot H \cdot \tan\beta \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2} \right] \approx 0.45 \cdot k \cdot H \cdot \tan\beta = 0.45 \cdot k \cdot \frac{H^2}{y} \approx \frac{k}{2y} \cdot H^2 \quad (13)$$

となる。即ち、

a) 流量 Q は、ダムの形状が一定で $\tan\beta = H / y$ が一定ならば、高さ H に比例する。

b) 流量 Q は、ダムの高さ H が一定ならば、下流面の勾配 $\tan\beta$ に比例する。勾配 $\tan\beta$ がきつくてダムの底面長が減るほど、流量 Q は多い。

c) 同一の下流面のり面の底面長 y に対しては、流量 Q はダム高さ H の二乗に比例する。

(13)式は $Q = \frac{k}{2B} \cdot \left\{ (H_1)^2 - (H_2)^2 \right\}$ (4b) と同じ形をしている。

d)簡単に考えると、$Q \approx \frac{k}{2y} \cdot H^2 = k \cdot \frac{\frac{H}{2}}{y} \cdot H = k \cdot \bar{i} \cdot H$

$\bar{i}$ はダム全体の平均動水勾配の近似値（平均水頭 H/2 を浸透の道筋の距離の近似値 y で除した値）であり、H は浸透面積、と解釈できる。

４．６　　揚水

４．６．１　定常的揚水

1)重力井戸の問題。あるいは、原位置で透水係数 k を測定する方法として用いられる。

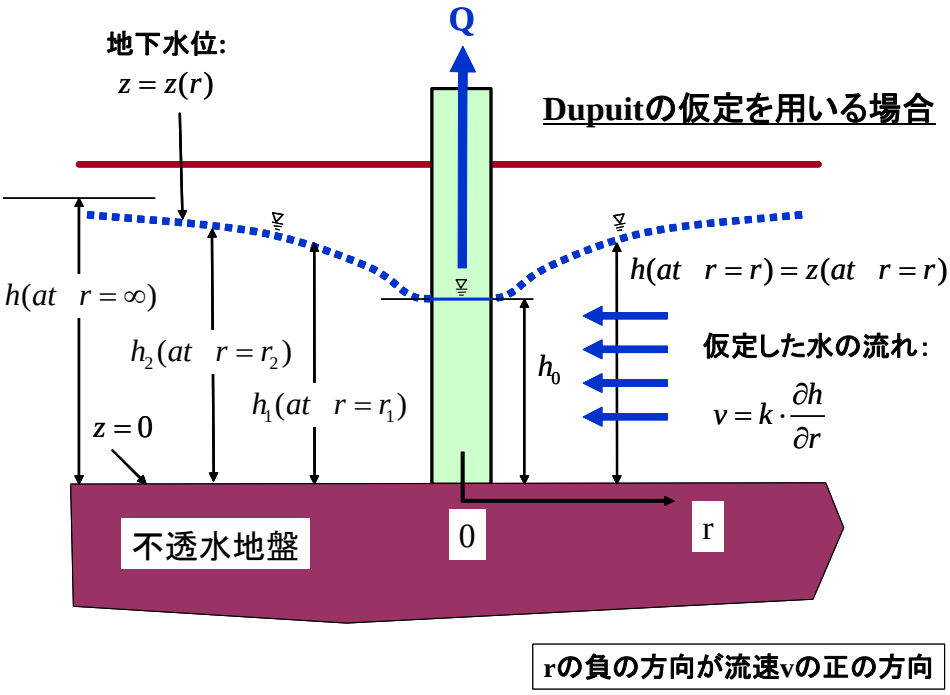
・軸対称問題。

・　本来は、鉛直方向の流速の成分はゼロではないので、

流速を v、鉛直方向の座標を z として、本来は $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$、$\frac{\partial v}{\partial z} \neq 0$ である。

・　流速 v と水頭 h が高さ方向 z に対して一定と仮定する（Dupuit の仮定を用いる）。

即ち、$\frac{\partial h}{\partial z} = 0$、$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ とする。すると、半径 r の負の方向の流速を正として、$v = k \cdot \frac{\partial h}{\partial r}$（z 方向に一定）が得られる。



$v = k \cdot \frac{\partial h}{\partial r}$ を用いて、

総流量　$Q = 2\pi r \cdot v \cdot h = 2\pi r \cdot k \cdot \frac{\partial h}{\partial r} \cdot h = \pi r \cdot k \cdot \frac{\partial (h^2)}{\partial r} = \pi k \cdot \frac{\partial (h^2)}{\partial (\ln r)}$　　(1)

従って、$\frac{Q}{\pi k} = \frac{\partial (h^2)}{\partial (\ln r)}$　　(2)

上式は、r 方向に対して Q は一定で $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ であり、h は r だけの変数なので、

$d(h^2) = \frac{Q}{\pi k} \cdot d(\ln r)$　　(3)

となる。これを、r 方向に対して Q は一定であるので、lnr に対して積分すると、

$h^2 = \frac{Q}{\pi k} \cdot \ln r + C$　　（C は未定の定数）　　(4)

（注）(1)式は Dupuit の仮定を用いた近似式なので、不合理なところがある。

1)　r=0 に対しては適用できない。

2)　$r \to \infty$ で $h \to \infty$ となる。

（透水係数 k を求める）

Q の値と、$r=r_1$ での h_1 の値と $r=r_2$ での h_2 の値を測定すると、(4)式から、

$$h_1^{\,2} = \frac{Q}{\pi k}\cdot \ln r_1 + C$$

$$h_2^{\,2} = \frac{Q}{\pi k}\cdot \ln r_2 + C$$

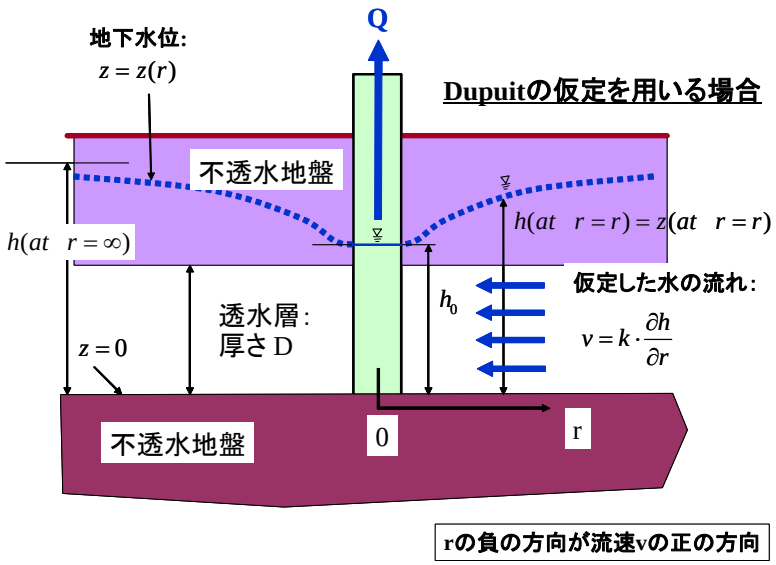
従って、 $k = \dfrac{Q}{\pi}\cdot\dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{h_2^{\,2} - h_1^{\,2}}$ (5)

（透水係数 k が既知の時、透水係数 Q を求める）

$$Q = k\pi\cdot\frac{h_2^{\,2} - h_1^{\,2}}{\ln(r_2 / r_1)} \qquad (6)$$

２）堀り抜き井戸

透水層の厚さが一定（D）。



総流量　$Q = D \cdot 2\pi r \cdot v = D \cdot 2\pi r \cdot k \cdot \dfrac{\partial h}{\partial r} = D \cdot 2\pi \cdot k \cdot \dfrac{\partial h}{\partial (\ln r)} = const.$　(1)

$$\frac{\partial h}{\partial (\ln r)} = \frac{Q}{2\pi kD} \qquad (2)$$

Q は r に対して一定なので、上式から、　(3)

$$dh = \frac{Q}{2\pi kD} \cdot d(\ln r) \qquad (4)$$

従って、

$$h = \frac{Q}{2\pi kD} \cdot \ln r + C \qquad \text{(C は定数、未定)} \qquad (5)$$

(透水係数 k を求める)

Q の値と、$r=r_1$ での h_1 の値と $r=r_2$ での h_2 の値を測定すると、(5)式から、

$$h_1 = \frac{Q}{2\pi kD} \cdot \ln r_1 + C$$

$$h_2 = \frac{Q}{2\pi kD} \cdot \ln r_2 + C$$

従って、　$k = \dfrac{Q}{2\pi D} \cdot \dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{h_2 - h_1}$　(6)

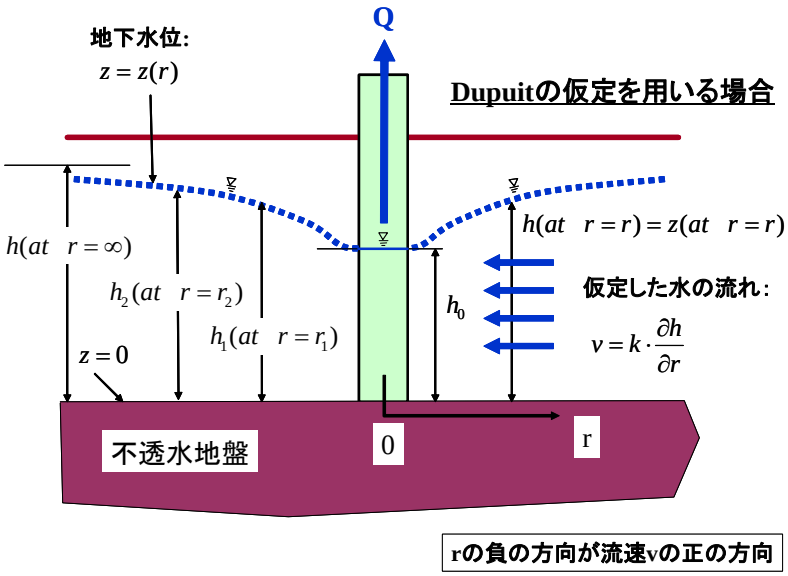
（透水係数 k が既知の時、透水係数 Q を求める）

$$Q = 2k\pi D \cdot \frac{h_2 - h_1}{\ln(r_2 / r_1)} \qquad (7)$$

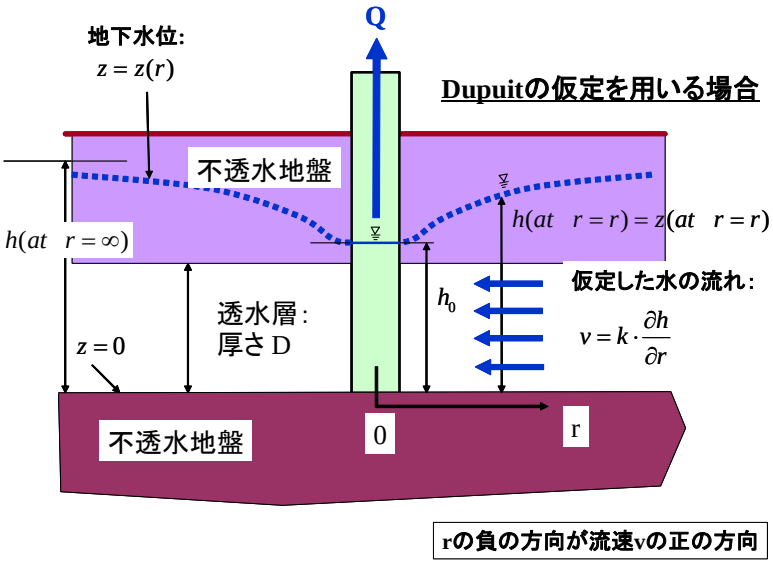
地下水の流れ演習[3]:

以下に示す軸対象の地下水の流れで、半径 r_1 での水頭 h_1 と半径 r_2 での水頭 h_2、及び透水係数 k が既知である場合の井戸へ流れ込む地下水の総流量 Q を求めよ。ただし、流速 v と水頭 h が高さ方向 z に対して一定と仮定せよ（Dupuit の仮定）

1)重力井戸の問題。



３）堀り抜き井戸：透水層の厚さが一定（*D*）



1 の答）

$v = k\cdot\frac{\partial h}{\partial r}$ を用いて、

総流量 $Q = 2\pi r\cdot v\cdot h = 2\pi r\cdot k\cdot\frac{\partial h}{\partial r}\cdot h = \pi r\cdot k\cdot\frac{\partial(h^2)}{\partial r} = \pi k\cdot\frac{\partial(h^2)}{\partial(\ln r)}$ (1)

従って、$\frac{Q}{\pi k} = \frac{\partial(h^2)}{\partial(\ln r)}$ (2)

上式は、r 方向に対して Q は一定で$\frac{\partial Q}{\partial r}=0$であり、h は r だけの変数なので、

$$d(h^2)=\frac{Q}{\pi k}\cdot d(\ln r) \qquad (3)$$

となる。これを、*r* 方向に対して Q は一定であるので、ln*r* に対して積分すると、

$$h^2=\frac{Q}{\pi k}\cdot \ln r + C \qquad (C は未定の定数) \qquad (4)$$

半径 r_1 での水頭 h_1 と半径 r_2 での水頭 h_2 を(4)式に代入して、

$$h_1^{\,2}=\frac{Q}{\pi k}\cdot \ln r_1 + C$$

$$h_2^{\,2}=\frac{Q}{\pi k}\cdot \ln r_2 + C$$

従って、$Q=k\pi\cdot\frac{h_2^{\,2}-h_1^{\,2}}{\ln(r_2/r_1)}$ (5)

２）の答

総流量 $Q=D\cdot 2\pi r\cdot v=D\cdot 2\pi r\cdot k\cdot\frac{\partial h}{\partial r}=D\cdot 2\pi\cdot k\cdot\frac{\partial h}{\partial(\ln r)}=const.$ (1)

$$\frac{\partial h}{\partial(\ln r)}=\frac{Q}{2\pi kD} \qquad (2)$$

Q は r に対して一定なので、上式から、 (3)

$$dh=\frac{Q}{2\pi kD}\cdot d(\ln r) \qquad (4)$$

従って、

$$h=\frac{Q}{2\pi kD}\cdot \ln r + C \qquad (C は定数、未定) \qquad (5)$$

$r=r_1$ での h_1 の値と $r=r_2$ での h_2 の値を用いると、(5)式から、

$$h_1=\frac{Q}{2\pi kD}\cdot \ln r_1 + C$$

$$h_2=\frac{Q}{2\pi kD}\cdot \ln r_2 + C$$

従って、 $Q=2k\pi D\cdot\frac{h_2-h_1}{\ln(r_2/r_1)}$ (6)