応用数学 III　復習問題プリント 1

木村真一

【フーリエ解析】

○周期は T で、そのうちのパルス幅 tb の間は振幅は A で一定となり、残りの時間は 0 と方形パルス信号の周波数スペクトルを求めてください。

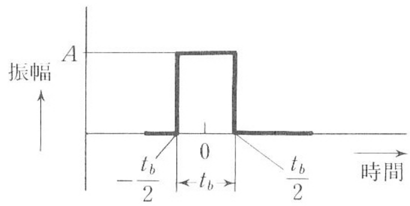
○デルタ関数 δ(t)は時刻 t=0 の時のみ値をもち、かつ-∞から∞まで積分したときに値が 1 になる関数です。デルタ関数の周波数スペクトルを求めてください。

○signum 関数は以下のように定義されています。

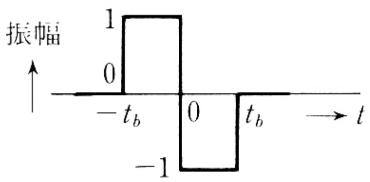
$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$

signum 関数の周波数スペクトルを求めてください。

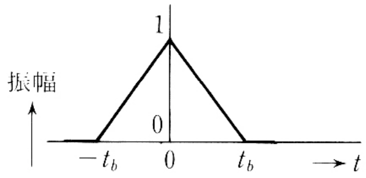
○下図のような単一方形パルス波の周波数スペクトルを求めてください。



○図のような波形の周波数スペクトルを求めてください。



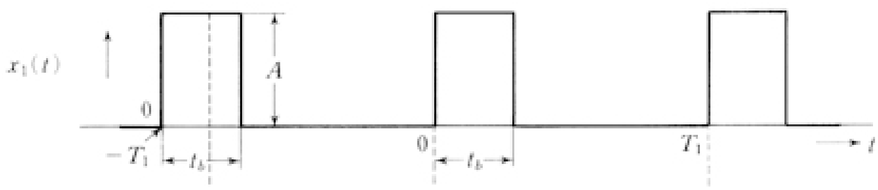
○図のような三角パルス波の周波数スペクトルを求めてください。



【相関解析】

○正弦波：$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \theta)$ の自己相関関数及びパワースペクトルを求めてください。

○下図のような矩形波の自己相関関数及びパワースペクトルを求めてください。



○下記のような帯域が制限された白色雑音の自己相関関数を求めてください。

$$\Phi_B(\omega) = \begin{cases} \sigma^2 & \left(2\pi\left(f_0 - \dfrac{B}{2}\right) \leq \omega \leq 2\pi\left(f_0 + \dfrac{B}{2}\right)\right) \\ 0 & \left(2\pi\left(f_0 - \dfrac{B}{2}\right) > \omega, \omega > 2\pi\left(f_0 + \dfrac{B}{2}\right)\right) \end{cases}$$

○次のようにポアソン分布に従うランダムパルスのパワースペクトルを求めてください。

$$\phi_{11}(\tau) = A^2 e^{-k|\tau|}$$

○正弦波信号 $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta)$ は、位相 θ が 0〜2π の間で一様分布するものとします。この x(t)の自己相関関数を求めてください。ただし　ω_0 は定数とします。

【群・環・体の基礎】

○実数に対する演算として $a \circ b = a + b - 2$ と定義します。このときこの演算が群になることを示してください。また、単位元、逆元をそれぞれ求めてください。

○実数に対する演算として $a \circ b = ab - a - b + 2$ と定義します。このときこの演算は、そのままでは群ではないですが、ただ一つの元を除外すると群になります。その要素とは何ですか。また、その時の単位元、逆元をそれぞれ求めてください。

○ $\mathbf{R}^2$ に対する演算として、$(a,b) \circ (c,d) = (c + ad, bd)$ を定義します。このとき集合 $G = \left\{(a,b) \in \mathbf{R} \middle| b \neq 0\right\}$ がこの演算に関して群になることを示してください。また、その時の単位元、逆元をそれぞれ求めてください。

○　$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ とするとき、D は行列の加法、乗法について、体を成すことを示してください。

〇３つの元だけからなる集合$G=\{a,b,e\}$が、演算∘について群になり、単位元が e だったとすると、 a∘a、 a∘b、 b∘a、 b∘b、はそれぞれ何になりますか。

〇４つの元からなる集合$G=\{a,b,c,e\}$が、演算∘について群になり、単位元が e だったとします。このとき各演算の結果は２通り考えられます。

１） a∘a= b∘b= c∘c=e になる場合、他の演算の結果はどうなるでしょう。

２） a∘a= b になる場合、他の演算の結果はどうなるでしょう。

【準合計写像】

〇G を複素数の 0 以外の元についての乗法に関する群

G’を実数の 0 以外の元についての乗法に関する群

とするとき、$f(z)=|z|$が準同型写像になることを示してください。

〇G を実数の加法に関する群

G’を複素数の乗法に関する群

とするとき、$f(x)=\exp(2\pi ix)$が準同型写像になることを示してください。

〇G：有理数の加法に関する群

G’：正の有理数の乗法に関する群

として$f:G\to G'$が準同型写像だとします。

このとき、任意の x について$f(x)=1$であることを示してください。

〇G：有理数の加法に関する群

G’：有理数の加法に関する群

として$f:G\to G'$が準同型写像だとします。

このとき、$f(1)=1$とすると、

任意の x について$f(x)=x$であることを示してください。