応用数学 III　復習問題プリント 1

木村真一

【確率の基礎】

○下図のような袋から玉を一つとり出すクジを考えます。

（1）図 1 のクジを考えるとき、玉に 1 と書かれている事象と、取り出した玉が赤であったとき、そこに 1 とかかれている確率はいくらですか。

（2）図 1 のクジを考えるとき、玉に 1 と書かれている事象と、玉の色が赤である事象とは独立ですか？

（3）図 2 のクジを考えるとき、玉に 1 と書かれている事象と、玉の色が赤である事象とは独立ですか？

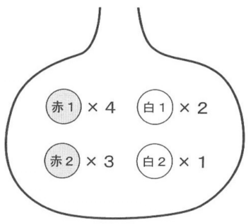


図 1

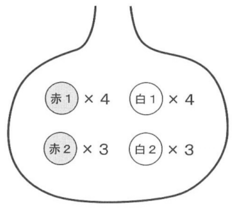


図 2

○B1 と B2 という 2 つの袋があるとします。B1 には赤玉 3 つと白玉 1 つが入っています。B2 には赤玉 2 つと白玉 2 つが入っています。目の前にどちらかの袋が出されたとき、一つ取り出したら赤玉だった。さて目の前の袋が B1 であるか、B2 であるか推測したいが、それぞれ確率はいくらでしょうか。

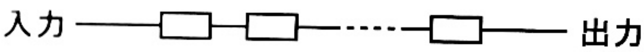
○ある電子部品を A,B,C3 台の機械で製造していて、各機械の生産量はそれぞれ 20%,30%,50%で、不良品のでる確率は 5%,3%,2%である。この部品を 1 個取り出したら不良品であったとき、それが機械 A で製造されたものである確率を求めてください。

○故障率が等しく p である機械を接続することを考えます。

（1）図 1 のように直列に接続されて機能しているとき、システム全体の故障確率は？

（2）図 2 のように直列に接続されて機能しているとき、システム全体の故障確率は？

図 1



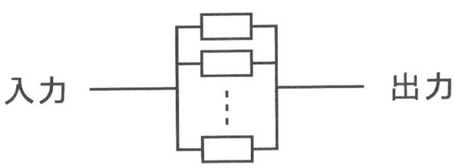


図 2

○ある会社が検査方法を開発し、ある病気Uにかかっているとき99%でかかっていると判断する事ができる。ただし、非常に低い確率で 1%であるが、かかっていない人を、ある病気Uにかかっているとご判断してしまうという。この病気にかかる確率が1%として、この検査でポジティブとでたときに実際にUにかかっている確率はどのぐらいですか。

【確率分布】

○確率密度関数f(x)=1/2が、0 ≦ X ≦2で定義されているとき、P(1<X≦2)、P(X=1）を求めてください。

○確率密度関数f(x)=1-｜x ｜が、-1≦X ≦1で定義されている。このときのP(-0.5<X<0.5)を求めてください。

○確率変数Xがa≦X≦bで一様分布であるとき確率密度関数f(x)、平均μ=E[X]、分散σ2=V[X]をそれぞれ求めてください

【さまざまな確率分布】

○次の確率分布の平均と分散を求めてください。

二項分布 $f(x)=P(X=x)=\dfrac{n!}{(n-x)!x!}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

ポアソン分布 $f(x)=P(X=x)=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

指数分布 $f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$

正規分布 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

【多次元確率分布】

○2次元確率密度関数f(x,y)が、ある矩形領域(x1≦X ≦x2, y1 ≦Y ≦y2)で一定値をとるとき、この分布は2次元一様分布といわれる。このときの一定値を求めてください。

○1,1,2,3と書かれた4枚のカードから2枚抜き出して並べるとき、はじめのカードの数をX、2番目のカードの数をYとします。

（１）X,Yの同時分布を求め、その周辺分布を求めてください。

（２）X,Yそれぞれの平均、及び分散を求めてください。

（３）X,Yの共分散を求めてください。

○確率変数の和の平均が各確率変数の平均の和になることを示してください。

○確率変数の和の分散が、それぞれの確率変数の分散とどのような関係にあるか導いてください。

【大数の法則と中心極限定理】
○大数の法則の意味を自分の言葉で説明してください。

○モーメント母関数は次の式で求めることができます。

$$\psi(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int e^{tx} f(x) dx$$

次の確率分布のモーメント母関数と、その母関数を用いて平均と分散をそれぞれ求めてください。

二項分布　$f(x) = P(X = x) = \dfrac{n!}{(n-x)!x!}\theta^x (1-\theta)^{n-x}$

正規分布　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

○中心極限定理の意味を自分の言葉で説明してください。

○X1、X2 が互いに独立で同一の指数分布 $f_1(t) = f_2(t) = ae^{-at}$ (t≧0)に従うとき、和の分布を求めてください。

【確率過程】
○直線上に等間隔に並んでいる点の上を運動する粒子を考えます。点それぞれに番号をつけて、粒子のいる場所の番号を、「状態」とします。ある時刻 n に状態 i にいた粒子が、次の時刻 n+1 に右隣の状態 i+1 に移動する確率を p、左隣の状態 i-1 に移動する確率を q、そのままとどまる確率を r=1-p-q とします。
とりうる状態を S={0,1,2,3,4}とし、0 が吸収壁、4 が完全反射壁とします。

遷移確率行列を求めてください。

遷移グラフを描いてください。

〇ある工場に 1000 個の電球が取り付けられてます。切れた電球は月末にまとめて交換します。過去の統計によると、新しい電球を取り付けてから経過月数ごとの取り換え数は下の表のようになっています。取り合えた後の経過月数{1,2,3,4,5}を状態とします。

電球の取り替え率

経過月数	取り替え率
1	0.03
2	0.20
3	0.60
4	0.15
5	0.02

推移確率行列を求めてください。
推移グラフを描いてください。

〇確率 p=0.4 で 1 ドルの勝ち、確率 1-p=0.6 で 1 ドルの負けとなるギャンブルを考えます。プレーヤーは所持金がなくなるか N ドル稼いだ時点でゲームをやめるとします。n 回ゲームを行ったときの所持金 Xn はマルコフ連鎖になります。

N=5 の時の推移確率行列を求めてください。
推移グラフを描いてください。