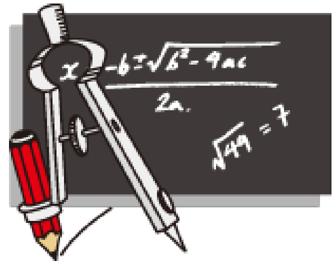
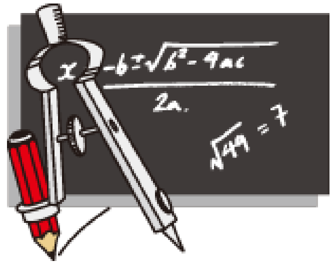


応用数学III
(9) フーリエ変換の性質

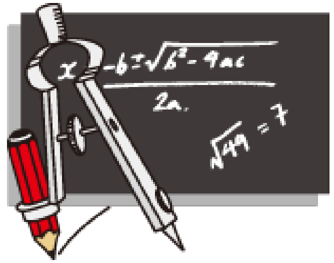
木村真一

講義のスケジュール



(1)　確率の基礎
(2)　確率変数と確率分布
(3)　いろいろな確率分布
(4)　多次元確率分布
(5)　大数の法則と中心極限定理
(6)　確率過程の基礎１
(7)　確率過程の基礎２
(8)　フーリエ解析
(9)　フーリエ変換の性質
(10)　相関解析
(11)　不確定信号の相関解析
(12)　群・環・体の定義
(13)　準同型写像
(14)　Nを法とする合同式

フーリエ変換（復習）



- フーリエ変換

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{i\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-iwt} dt$$

- フーリエ逆変換

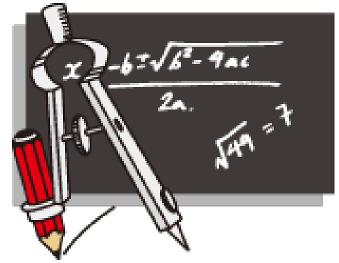
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{iwt} d\omega$$

- フーリエ変換対

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

フーリエ変換の主な性質：
線形性



- 既に皆さんご存知のように積分演算には線形性がありました。

$$\int af(x)+bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

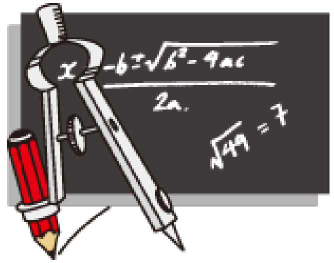
- このことからフーリエ変換にも線形性があることがわかります。つまり

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega), x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

- であるとき

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

フーリエ変換の主な性質：対称性

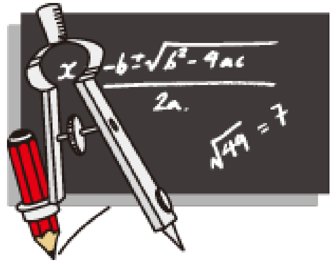


- フーリエ変換には波形と周波数の間に以下のような関係があります。

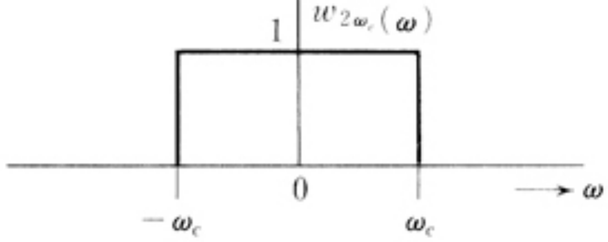
$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad \text{ならば} \quad X(t) \leftrightarrow 2\pi x(\omega)$$

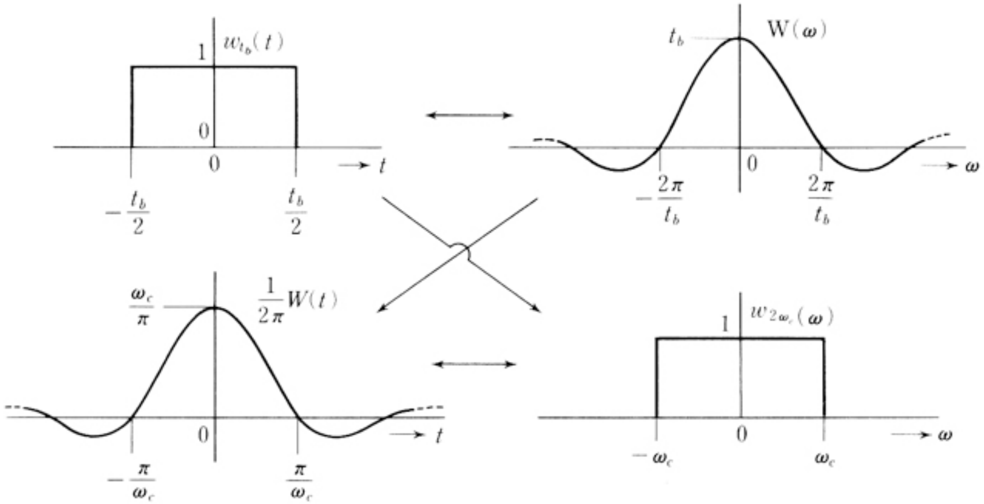
- この関係のことを対称性といいます。
- 簡単に証明してみましょう。

例題：周波数が単一方形スペクトルの波形

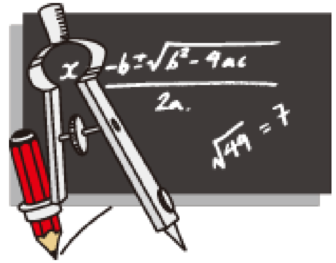


- 左のように周波数スペクトルが単一方形波の形状をとるとき、波形はどのようになっていますか。
- フーリエ変換の対称性を使うと簡単に求められます。





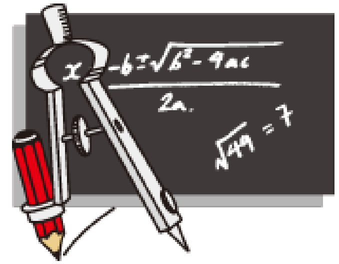
フーリエ変換の主な性質：
時間軸の伸縮



- 波形において時間を延ばしたり縮めたりすると、スペクトル上でどのような影響があるでしょうか。
- 音声を録音したテープを速く回ししたり、遅く回ししたりすることに相当します。（こんな遊びしませんでした？）

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

フーリエ変換の主な性質：時間推移

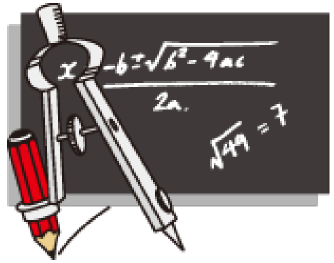


- つぎに、波形が形としては変化せず、時間軸上を移動する、例えば時間遅れがある場合を考えてみましょう。
- 数学的にはx(t)からx(t-t0)の変換ということになります。

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0} X(\omega)$$

- 当然スペクトルの形状には影響がありません。位相のに影響するだけ。
- このような信号伝送の事を無歪伝送といいます。

フーリエ変換の主な性質：周波数推移

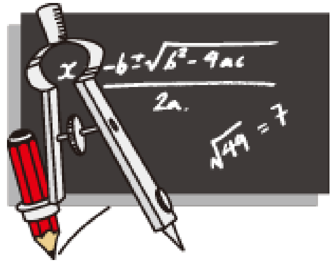


- 逆にスペクトル上の周波数が、平行移動した場合の事を考えます。

$$e^{i\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

- この場合波形の振幅が変動分だけ縮小された波形になります。実際は $e^{i\omega_0 t}$ の実数部分 $\cos(\omega_0 t)$ を掛けることに相当します。
- つまり振幅変調に相当します。

フーリエ変換の主な性質：時間微分



- 波形の時間微分を求めると次のようになります。

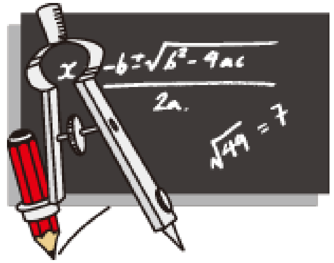
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega) e^{iwt} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega X(\omega)$$

- n回微分についてこの繰り返しになるので次の関係が成り立ちます。

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n X(\omega)$$

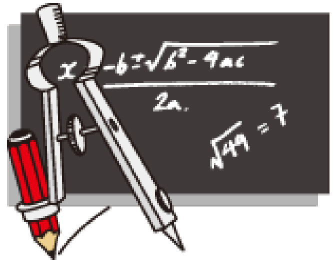
フーリエ変換の主な性質：
時間積分



- 同様に波形の時間軸上での積分は、フーリエ逆変換を利用して、次のようになります。

$$\int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \leftrightarrow \frac{X(\omega)}{i\omega}$$

フーリエ変換の主な性質：周波数微分



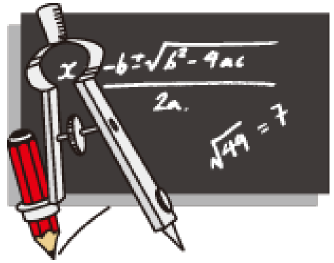
- 周波数スペクトルを周波数で微分する事を考えます。
- もとの波形は次のように変換されます。

$$-it \cdot x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

- n回微分は、同じ操作をn回繰り返すだけですから、以下のようになります。

$$(-it)^n \cdot x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$$

フーリエ変換の主な性質：
共役関数

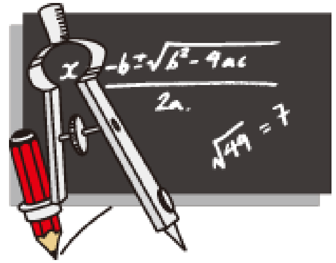


- 少し考え方を拡張して波形関数が複素数であるとします。
- これまでの議論で、波形関数が実数であることを使いませんでしたから、これまでの性質は全て複素関数についても有効です。
- 複素数の虚部の符号を反転したものを共役と言います。

$$x(t) = x_r(t) + ix_i(t) \Longleftrightarrow x^*(t) = x_r(t) - ix_i(t)$$

$$x(t) = Ae^{-i\omega t} \Longleftrightarrow x^*(t) = Ae^{-i\omega t}$$

フーリエ変換の主な性質：共役関数（つづき）



- 共役関数のフーリエ変換は次のようになります。

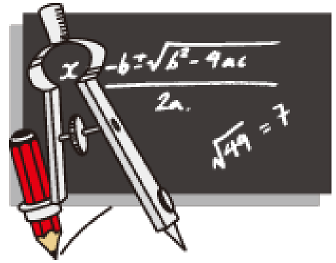
$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\omega)$$

- ここで　$X^*(\omega)$ は次のように定義されます。

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{x_r(t) - ix_i(t)\} e^{iwt} dt$$

- 定義より成り立つことは明らかです。

二つの波形の積のフーリエ変換



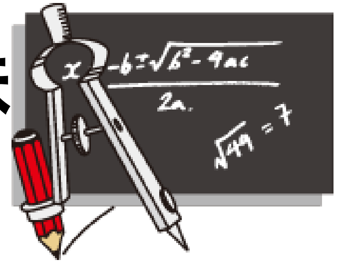
- 二つの波形x1(t)とx2(t)の積をy(t)とします。
- x1(t)、x2(t)のスペクトルをそれぞれX1{t}、X2(t)とすると、y(t)のスペクトルY(t)はどう表されるでしょう。

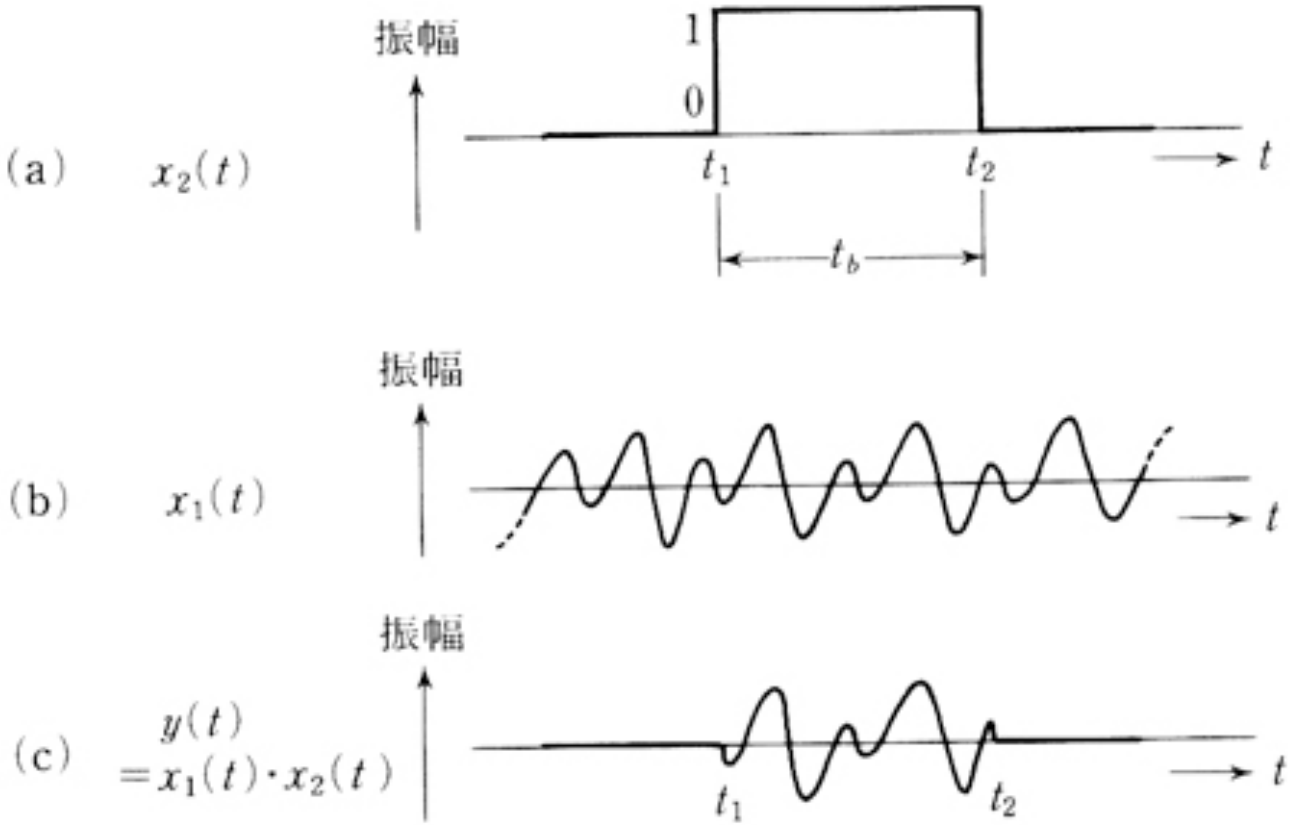
$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) X_2(\omega - u) du$$

- どこかで見た形ではありませんか？「たたみこみ」です。
- このことを、次のように記号で表します。

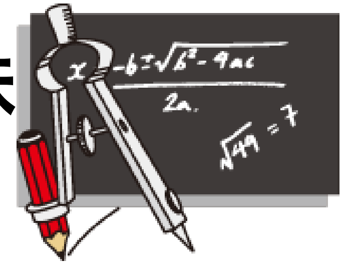
$$x_1(t)\cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

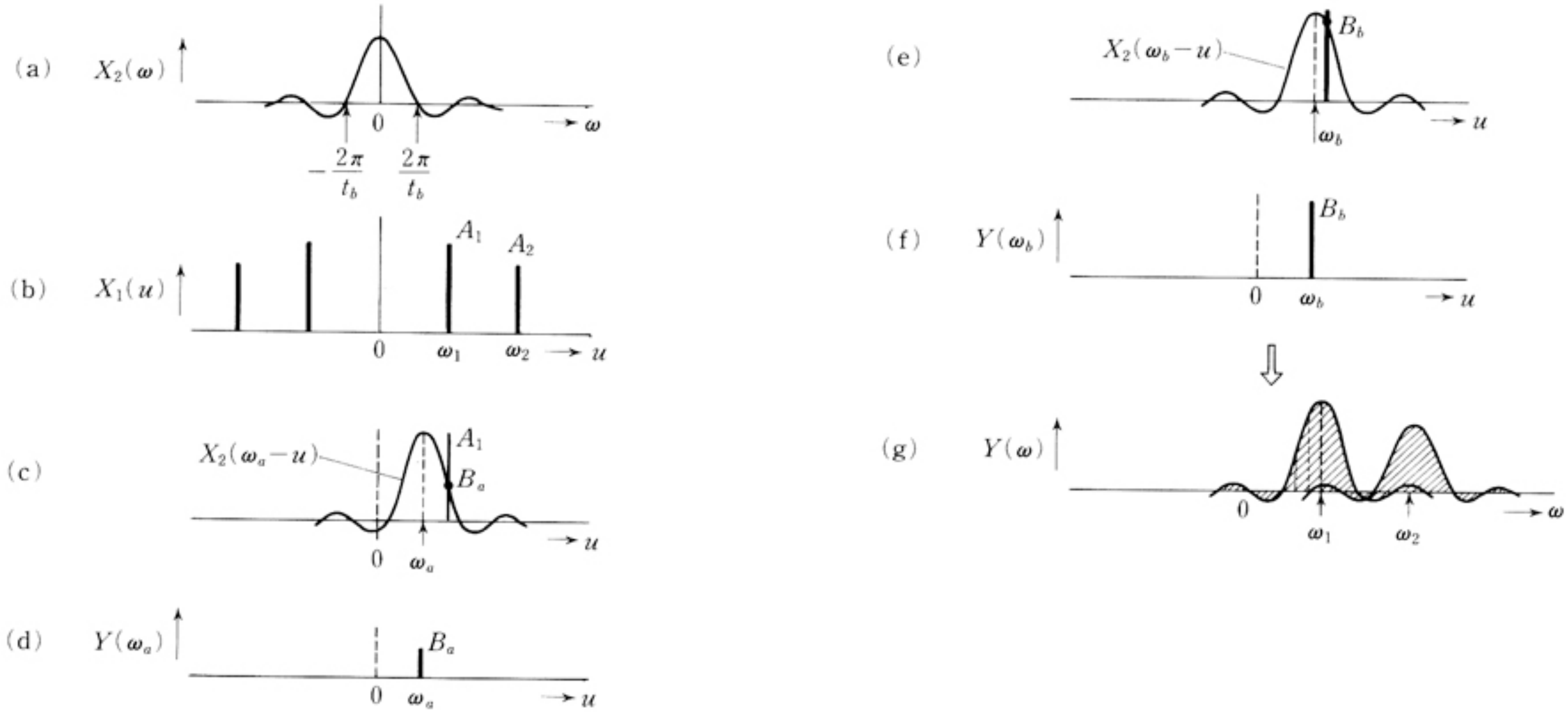
周波数スペクトル上でのたたみこみの意味1



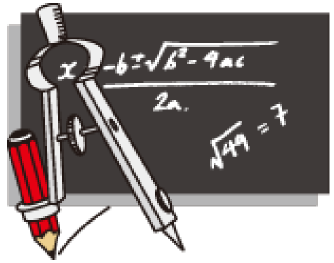


周波数スペクトル上でのたたみこみの意味 2





二つの周波数スペクトルの積のフーリエ逆変換



- 今度は逆に周波数スペクトル上でのかけ算が、波形においてどのように影響を与えるかについて考えます。
- x1(t)、x2(t)のスペクトルをそれぞれX1{t}、X2(t)として、 Y(t)はX1{t}、X2(t)の積だとします。

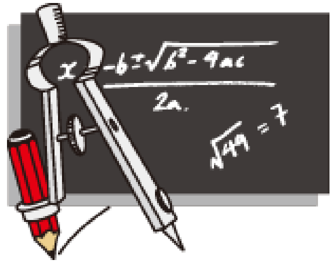
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

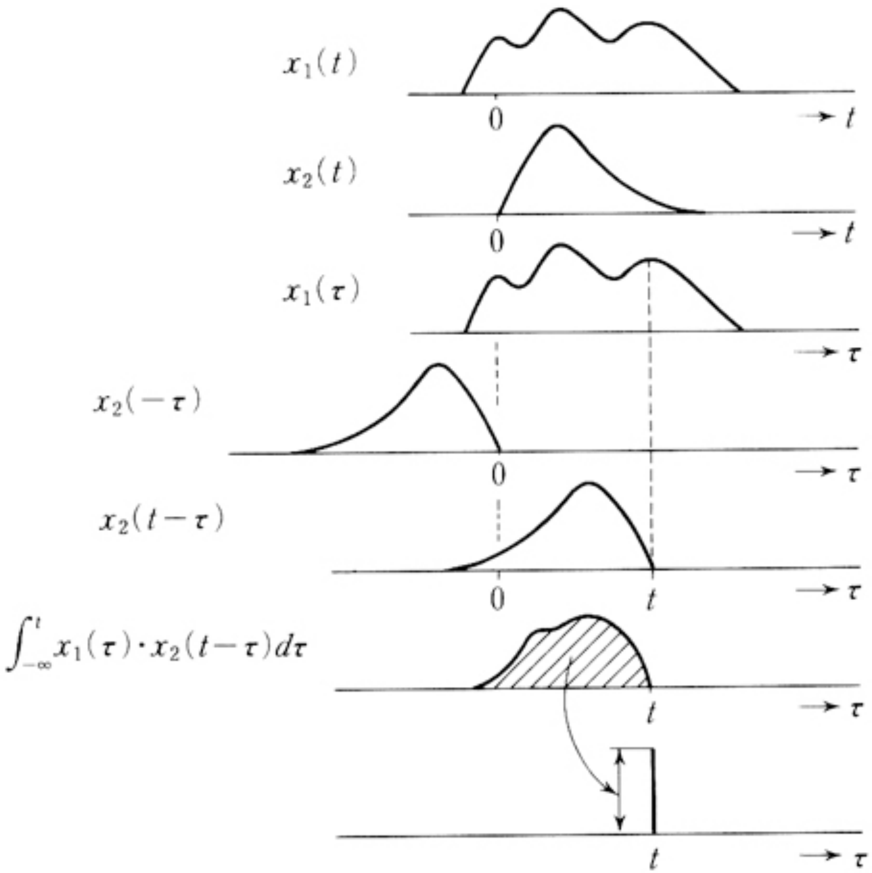
- つまり波形のたたみこみになっています。

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega)$$

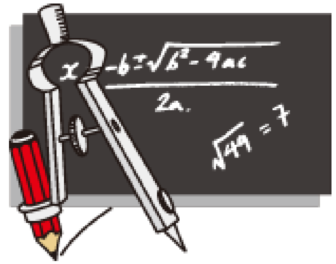
- さて、いよいよ相関関数が出てきました。

波形のたたみこみの意味



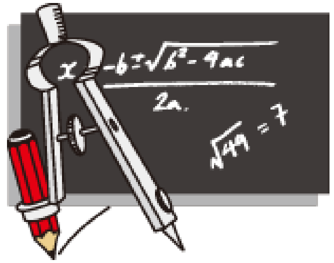


主要なフーリエ変換対のまとめ

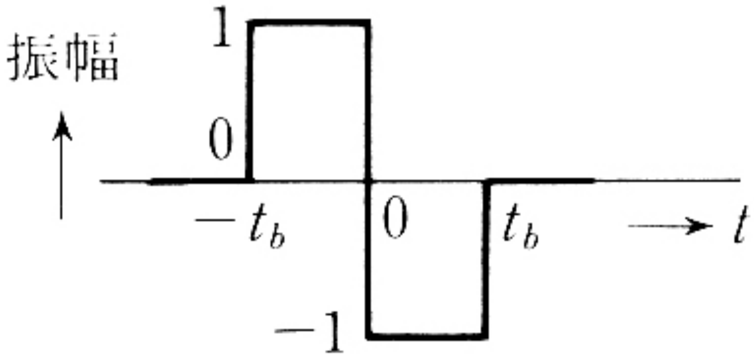


基本定理	波形 $x(t)$	$\longleftrightarrow$	周波数スペクトル $X(\omega)$
時間推移	$x(t-t_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$
周波数推移	$x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega-\omega_0)$
時間軸の伸縮	$x(at)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\cdot X\left(\dfrac{\omega}{\lvert a\rvert}\right)$
対称性	$X(t)$	$\longleftrightarrow$	$2\pi\cdot x(-\omega)$
時間微分	$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\longleftrightarrow$	$(j\omega)^n\cdot X(\omega)$
周波数微分	$(-jt)^n\cdot x(t)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$
時間積分	$\int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{j\omega}\cdot X(\omega)$
時間領域でのたたみ込み	$x_1(t)*x_2(t)$	$\longleftrightarrow$	$X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
周波数領域でのたたみ込み	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{2\pi}[X_1(\omega)*X_2(\omega)]$
共役	$x^*(t)$	$\longleftrightarrow$	$X^*(-\omega)$

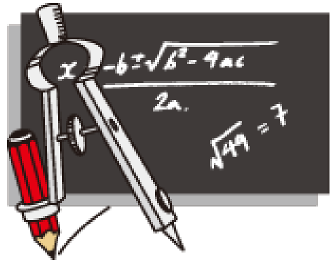
例題：単一方形パルスの組み合わせ



- 図のような波形の周波数スペクトルを求めてください。
- ヒント：この波形は先に求めた2つの単一方形パルスを、時間をずらして足し合わせたものです。



まとめ



- フーリエ変換の性質
  - 線形性
  - 対称性
  - 時間推移、周波数推移
  - 時間微分、時間積分、スペクトル微分
  - 共役
  - 波形の積、スペクトルの積