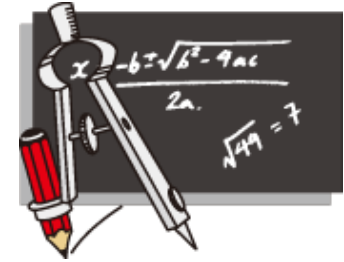


応用数学III

(8) フーリエ解析

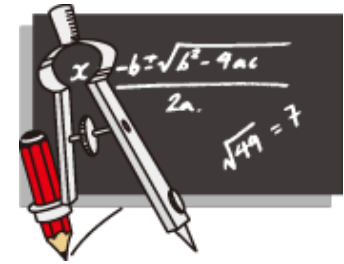
木村真一

講義のスケジュール



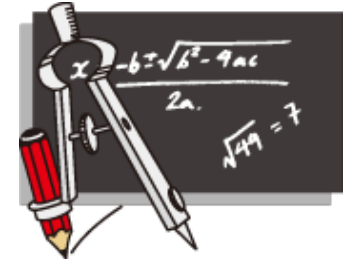
- | | |
|------------------|-----------------|
| (1) 確率の基礎 | (8) フーリエ解析 |
| (2) 確率変数と確率分布 | (9) フーリエ変換の性質 |
| (3) いろいろな確率分布 | (10) 相関解析 |
| (4) 多次元確率分布 | (11) 不確定信号の相関解析 |
| (5) 大数の法則と中心極限定理 | (12) 群・環・体の定義 |
| (6) 確率過程の基礎 1 | (13) 準同型写像 |
| (7) 確率過程の基礎 2 | (14) Nを法とする合同式 |

未知の信号の波形から その波の性質を探る



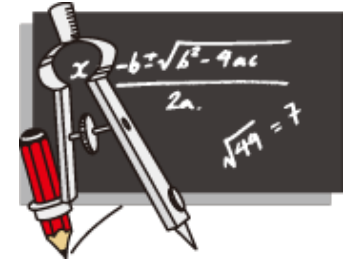
- ・ 私たちが現象を観測する時、得られた時系列データ（いわゆる波）から、その中に含まれている規則性や法則性を調べる事は重要です。
- ・ このように時系列データから、信号の持っている性質を調べる手法のことを一般に信号解析技術といいます。
- ・ ここでは信号解析技術の代表選手としてフーリエ解析と相関解析を取り上げ、その関係を議論します。
- ・ また相関解析の話から確率過程との関係を考えて見たいと思います。

確定信号と不確定信号



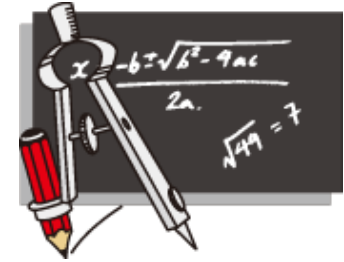
- ある時系列データがあったとき、そのデータが時間に関する関数 $x(t)$ で書けるとき、確定信号といいます。
- これに対して、データが時間に関する関数に確定できないとき、不確定信号といいます。
- 確率過程に従う信号は一般に不確定信号となります。
- しかし、不確定信号を取り扱うためには、まず確定信号の解析方法を理解してそれを拡張することが必要です。
- そこでまず、確定信号を取り扱います。

周期信号と非周期信号



- 周期信号
 - 一定の時間間隔でその時間間隔内の波形を繰り返す
- 概周期信号
 - 十分長い時間同じ波形が繰り返すか周期がほぼ一定
 - 周期信号として扱う
- 非周期信号
 - 一定の周期を持たない
 - 単一パルス波など
 - 時間区間を限定して数学的に記述する

フーリエ級数 1

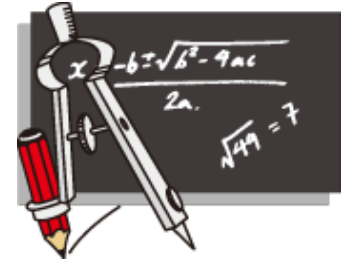


- まずはもっとも基本的な場合として周期信号を考えます。
- 周期信号は周期Tごとに同じ波が繰り返します。

$$x(t) = x(t + T)$$

- $1/T$ を基本周波数といいます。
- 基本周波数の正弦波はT秒後に必ず繰り返します。
- 基本周波数の整数倍の正弦波も、やはりT秒後に必ず繰り返します。
- 一定値もちろんT秒後に必ず繰り返します。
- これらを合わせて周期信号を記述する方法がフーリエ級数です。

フーリエ級数 2

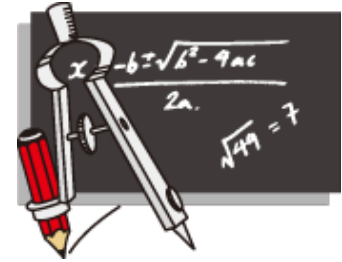


- ・ フーリエ級数は次の様に書くことができます。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

- ・ a_i 及び b_i の事をフーリエ係数といいます。
- ・ また $i=2$ 以上の成分を高調波成分といいます。

フーリエ級数 3



- またフーリエ係数を次のように置き換えて三角関数の加法定理を使うと、余弦波のみで表すことができます。

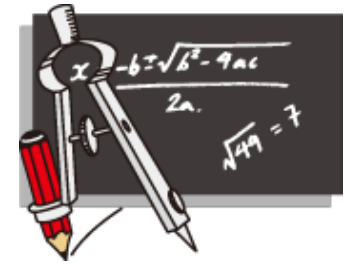
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{振幅の最大値}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad \text{初期位相}$$

$$a_n = A_n \cos \theta_n, b_n = A_n \sin \theta_n$$

$$x(t) = \frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} - \theta_i \right) \right\}$$

三角関数の直交性



- 三角関数は積分について以下のような関係があります。

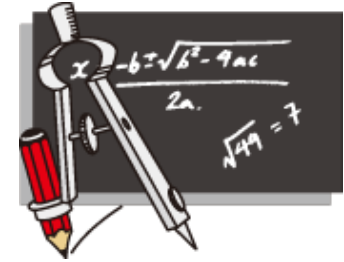
$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{T}{2} & (n = m) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{T}{2} & (n = m) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = 0$$

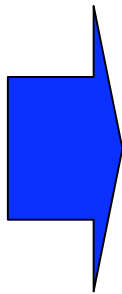
- これを直交性といいます。

フーリエ係数



- この直交性と積分の線形性を考え合わせるとフーリエ係数は積分により簡単に求められます。

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{a_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = b_n$$

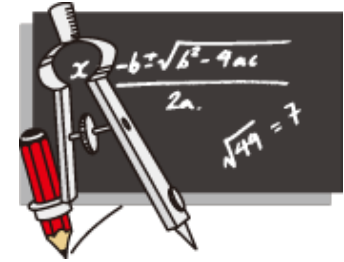


$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

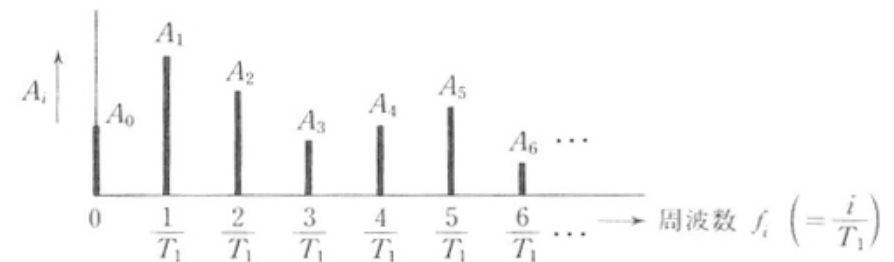
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

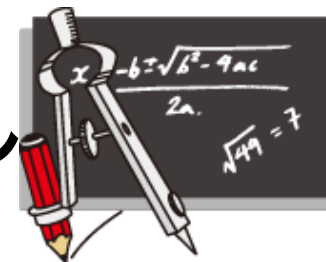
スペクトル



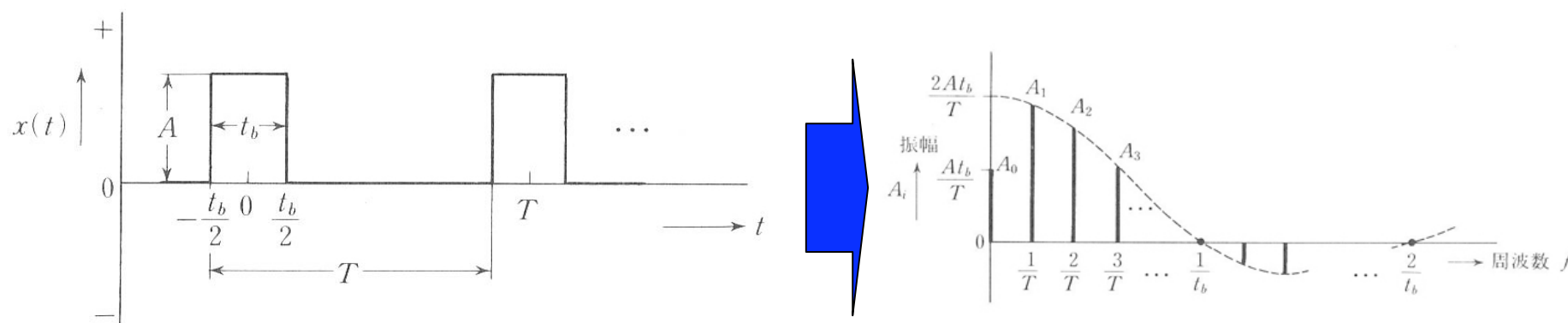
- ある信号 $x(t)$ に対して、その周波数成分 A_i の最大値を周波数に対してプロットした図のことを、周波数スペクトルと言います。
- 信号の性質を調べるのにとっても便利です。
 - 正確には振幅の周波数スペクトルです。
 - 角周波数成分には位相も特性としては存在しますが、振幅のみで議論することが多いです。
 - 右図のように特定の周波数に間欠的に成分を持つスペクトルを線スペクトルといいます。



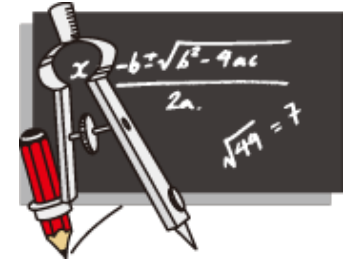
例題：方形パルス信号の周波数スペクトル



- ・ 下図のような方形パルス信号の周波数スペクトルを求めてください。
- ・ 周期は T で、そのうちのパルス幅 t_b の間は振幅は A で一定となり、残りの時間は0とします。



複素フーリエ級数 1



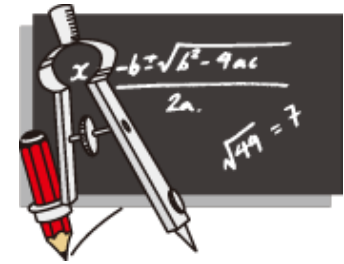
- ここまでフーリエ級数は、定数値、正弦波、余弦波の3系統の足し算で表していました。
- ここで、複素数を用いるとこれら3つの系統を一つにまとめて1系列の級数として表すことができとても便利です。
- 下記のオイラーの公式を用います

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{2\pi nt}{T}} + e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} \right) \quad \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{2\pi nt}{T}} - e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} \right)$$

- すると、フーリエ級数は次のように書き表せます。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

複素フーリエ級数 2



- これを複素フーリエ級数といいます。

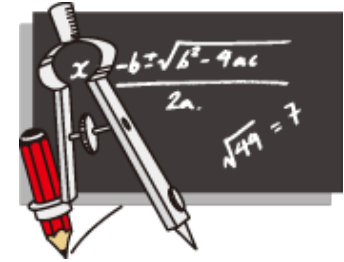
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}}$$

- ここでフーリエ係数 C_n の計算は同様に

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{i \frac{2\pi n t}{T}} dt$$

- ちなみに0乗は1ですから、定数項は c_0 として級数に含まれています。
- 級数の範囲が $-\infty$ から ∞ までとなっていることに注意してください。

フーリエ変換

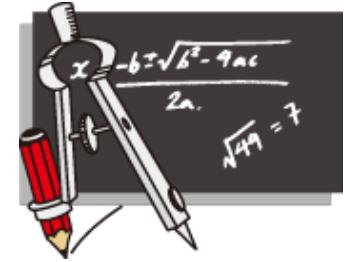


- いよいよ繰り返しのない波について考えてみましょう。
- 繰り返しのない波も周期無限大の波、つまり無限大の時間区間で繰り返す波と考えることができます。
- $T \rightarrow \infty$ ということは、基本角周波数 $\omega_0 = 2\pi/T$ は、無限に小さくなる、つまりスペクトルは連続になります。
- 故に先ほど定義したフーリエ級数は、次のような関数に収束します。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{i \frac{2\pi n t}{T}} dt \quad \longrightarrow \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

- このように $x(t)$ から $X(\omega)$ への変換のことをフーリエ変換といいます。

フーリエ逆変換

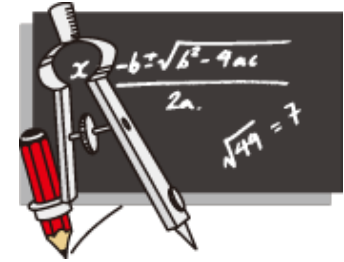


- $X(\omega)$ は繰り返しのない任意の波形 $x(t)$ のスペクトルとなっています。
- 先の例とは異なり、連続スペクトルとなります。
- このスペクトルも含まれる全ての波を重ね合わせればもとの波が復元されます。
- ただし、連続関数ですから積分により足し合わせる必要があります。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}} \quad \longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- これをフーリエ逆変換といいます。

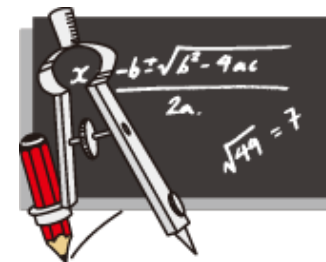
フーリエ変換対



- ・ フーリエ変換によって、もとの波形 $x(t)$ は周波数スペクトル $X(\omega)$ に一意に変換されます。
- ・ また、周波数スペクトル $X(\omega)$ は、フーリエ逆変換によって、波形 $x(t)$ に一意に変換されます。
- ・ この意味で $x(t)$ と $X(\omega)$ はお互いを特徴づける対になる存在だといえます。
- ・ このような関係をフーリエ変換対とよび、次のように記号で表します。

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

例題：デルタ関数の周波数スペクトル



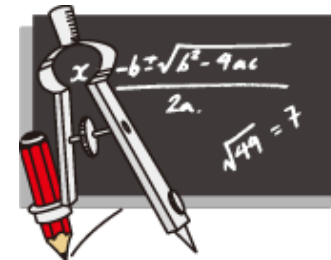
- ・ デルタ関数 $\delta(t)$ は時刻 $t=0$ の時のみ値をもち、かつ $-\infty$ から ∞ まで積分したときに値が1になる関数です。

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- ・ デルタ関数の周波数スペクトルを求めてください。

例題：signum関数の周波数スペクトル

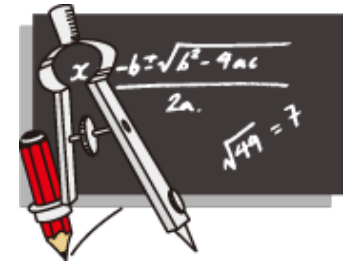


- signum関数は以下のように定義されています。

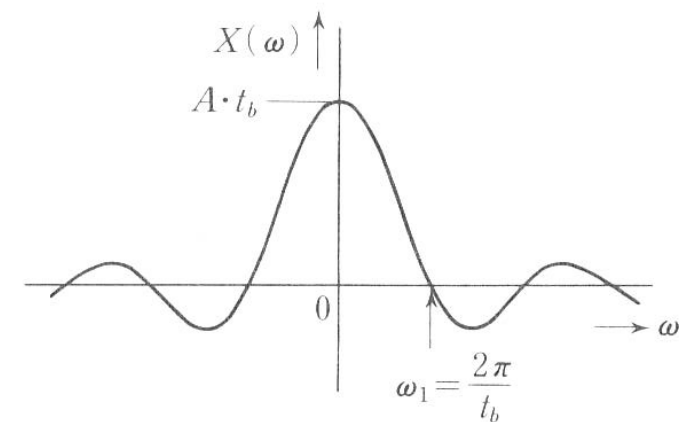
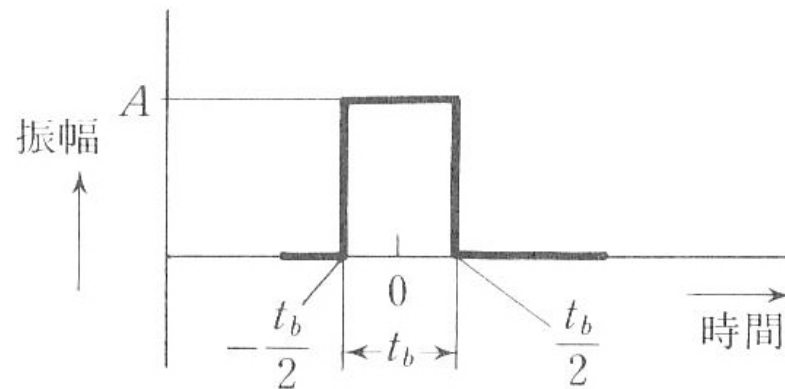
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

- signum関数の周波数スペクトルを求めてください。

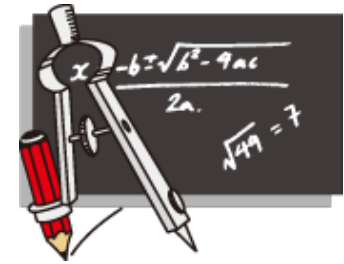
例題：単一方形パルス波の 周波数スペクトル



- 下図のような単一方形パルス波の周波数スペクトルを求めてください。



まとめ



- ・ フーリエ級数
- ・ 三角関数の直交性
- ・ スペクトル
- ・ 複素フーリエ級数
- ・ フーリエ変換
- ・ フーリエ逆変換
- ・ フーリエ変換対