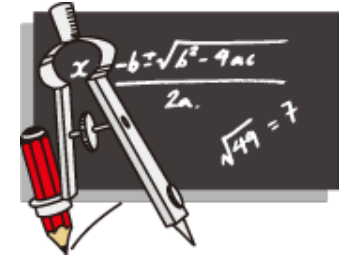


応用数学III

(7) 確率過程の基礎 2

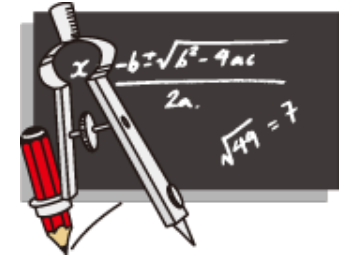
木村真一

講義のスケジュール



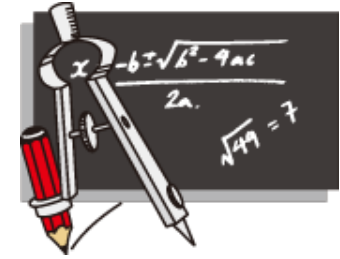
- | | |
|----------------------|-------------------|
| (1) 確率の基礎 | (8) フーリエ解析 |
| (2) 確率変数と確率分布 | (9) フーリエ変換の性質 |
| (3) いろいろな確率分布 | (10) 相関解析 |
| (4) 多次元確率分布 | (11) 群・環・体の定義 |
| (5) 大数の法則と中心極
限定理 | (12) 準同型写像 |
| (6) 確率過程の基礎 1 | (13) N を法とする合同式 |
| (7) 確率過程の基礎 2 | (14) 線形代数 |

確率過程



- 確率過程とは
時間変化する確率変数のことです。
別の言い方をすると
確率的に規定された時間変化のことです
- 逆に先にあげた数列の例ように、時間変化がある関係式によって完全に決まっている過程のことを確定過程といいます。

マルコフ連鎖

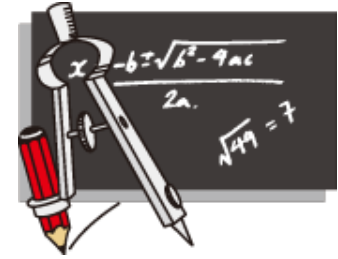


- 全ての $n \geq 0$ に対して次の関係が成り立つとき、確率過程はマルコフ連鎖といいます。

$$P(X_{n+1} = j | X_1, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = j | X_n)$$

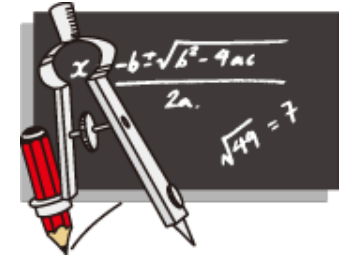
- この関係式が意味することは、「その過程の将来状態の条件付き確率分布が、現在状態のみに依存し、過去のいかなる状態にも依存しない特性を持つ」ということで、これをマルコフ性と言います。
- 平たく言うと「今の状態で次が決まる」ということです。
- (何と行き当たりばったりな.....)

到達可能

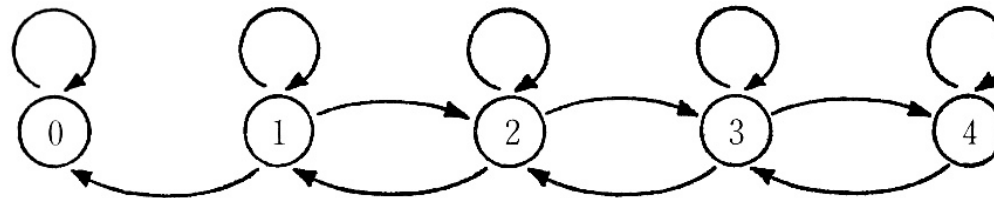


- ある状態*i*にあったものが、何ステップか時間が経過したときに状態*j*になると言う場合を考えましょう。これはいつも可能なわけではありません。
- $P^{(m)}(i, j) > 0$ となる $n \geq 0$ が存在するときに、状態*j*は状態*i*から到達可能であるといいます。
- これを記号で次のように表します。
$$i \rightarrow j$$
- つまり確率の大きさはともかくとして、状態*i*から出発した時に状態*j*になる可能性があるということです、

推移グラフ

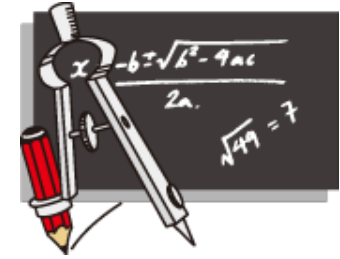


- ・ 到達可能性を考えるとき、次の様な推移グラフを用いると便利です。
- ・ 先のランダムウォークの推移グラフの例を次に示します。



- ・ マルコフ連鎖でとりうる状態を全て節点で表し、 $P(i,j) > 0$ が成り立つ全ての状態の組に対して、節点*i*から*j*への矢印つき枝を描きます。
- ・ グラフ上で節点*i*から節点*j*に到達する道（有向道）が1本以上あるとき到達可能です。

相互到達可能

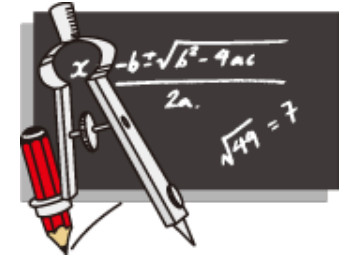


- ・ 状態*i*から状態*j*に到達可能で、かつ状態*j*から状態*i*に到達可能である場合には、*i*と*j*は相互到達可能であるといいます。次のように表します。

$$i \leftrightarrow j$$

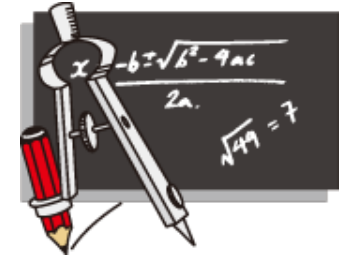
- ・ 相互到達可能であれば次の定理が成り立ちます。
 - 反射律 $i \leftrightarrow i$
 - 対象律 $i \leftrightarrow j$ ならば $j \leftrightarrow i$
 - 推移律 $i \leftrightarrow j$ かつ $j \leftrightarrow k$ ならば $i \leftrightarrow k$
- ・ これを同値関係といいます。

同値類



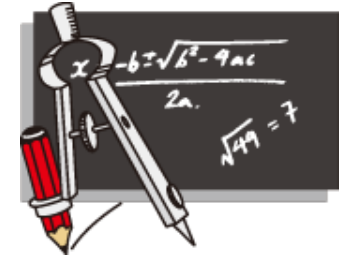
- 相互到達可能な状態の集まりを同値類といいます。
- 全ての状態は同値類に一意にわけることができます。
- 同一の同値類に属する状態同士は相互到達可能です。
- 別の類に属する状態同士は相互到達不可能です。ただし、一方的に到達可能なことはあります。
- 全ての状態が一つの同値類にまとまってしまう場合、このマルコフ過程は既約であるといいます。これはグラフ理論の言葉で言うと推移グラフが強連結であるとなります。

周期



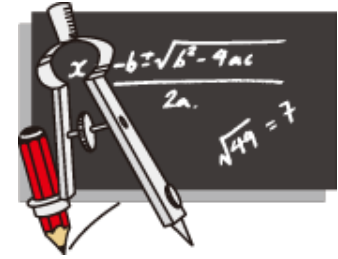
- ここから少し時間的な性質について考えていきましょう。
- マルコフ連鎖ではある状態が繰り返し出現することがあり得ます。
- そこで、 $P^{(n)}(i, i) > 0$ となる全ての整数 $n \geq 1$ の最大公約数を状態 i の周期 $d(i)$ として定義します。
- そのような n が存在しないときは $d(i) = 0$ とします。
- また、周期が 1 の状態は非周期的であるといえます。
- さて、 $i \leftrightarrow j$ ならば $d(i) = d(j)$ です。
- 証明できますか？

再帰性の定義 1



- マルコフ連鎖の状態の中には、繰り返し実現する確率が1のもの、つまり同じ状態に必ず戻るもの、があります。
- この必ず戻るということを再帰性といい、次のように定義します。
- まず、連鎖が初めて状態jに到達する時刻nを初到達時刻 T_j と呼びます。
- $X_1 \neq j, X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j$ ならば $T_j = n$ です。
- 全てのnについて $X_n \neq j$ ならば $T_j = \infty$ です。

再帰性の定義 2



- ここで新たに次のような確率を導入します。

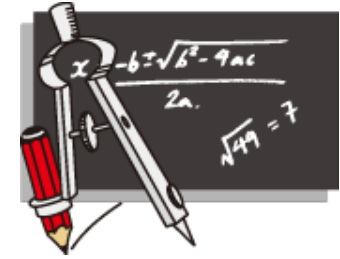
$$f^{(n)}(i, j) = P(T_j = n | X_0 = i)$$

- つまり*i*から出発した連鎖が初めて*j*に到達する時刻が*n*である確率の事です。
- さらに、次のような確率を定義します。

$$f(i, j) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(i, j)$$

- つまり、時間がどうあれ*i*から始めて*j*に到達する全確率です。

再帰性の定義 3

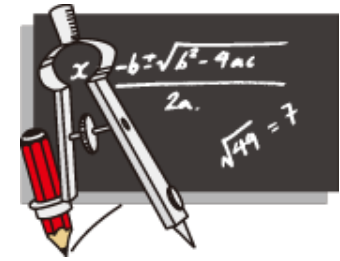


- この確率をもとに再帰性を定義すると、
 - $f(j,j)=1$ ならば再帰的
 - $f(j,j)<1$ ならば非再帰的 となります。
- T_j を使った表現では
 - $P(T_j = \infty | X_0 = j) = 0$ ならば再帰的
 - $P(T_j = \infty | X_0 = j) > 0$ ならば非再帰的 です。
- $f^{(n)}(i, j)$ と $P^{(n)}(i, j)$ の間には次のような関係があります。

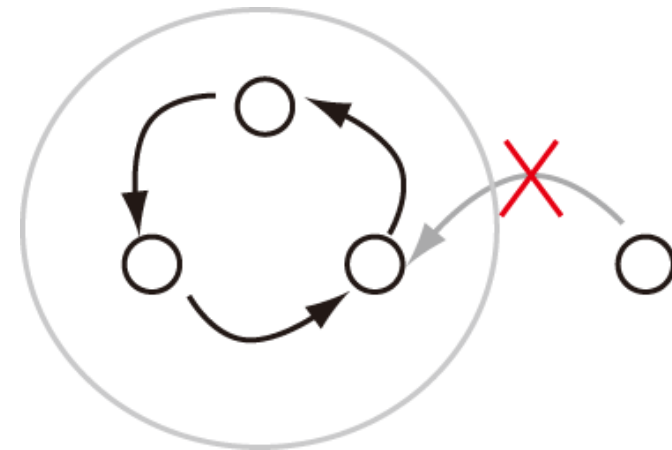
$$P^{(n)}(i, j) = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(i, j) P^{(n-k)}(j, j)$$

- 証明してみます。

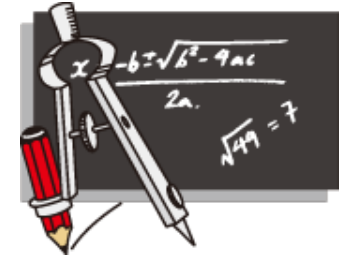
再帰的な同値類は閉じている



- マルコフ連鎖の状態の空でない任意の集合をCとします。
- Cに属さない任意の状態が、Cに属さないいかなる状態からも到達不能であるとき、Cは閉じているといえます。
- 再帰的な同値類は閉じています。



平均到達時間と平均再帰時間 1

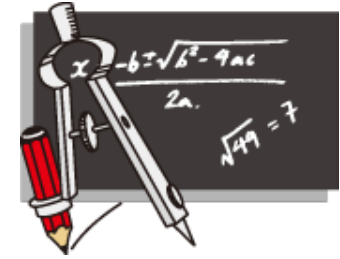


- 状態*i*から出発して状態*j*にはじめて到達するまでの時間の期待値を*m*(*i*,*j*)とします。すると....

$$\begin{aligned} m(i, j) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j = n | X_0 = i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n f^{(n)}(i, j) && (P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1) \\ m(i, j) &= \infty && (else) \end{aligned}$$

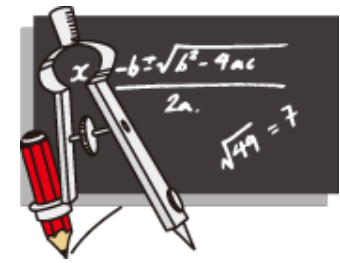
- ここで*m*(*i*,*j*)の事を*i*から*j*への平均到達時間と言います。
- 特に*m*(*j*,*j*)の事を*j*の平均再帰時間と言います。

平均到達時間と平均再帰時間 2

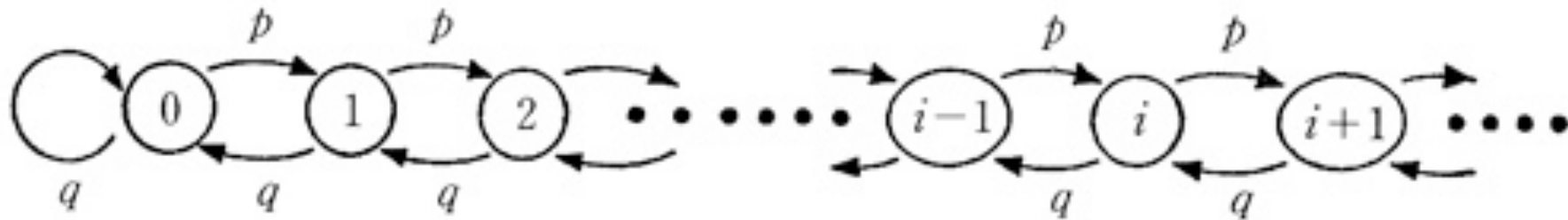


- 状態jが非再帰的なら $P(T_j = \infty | X_0 = j) > 0$ だから
平均再帰時間は ∞
- 状態jが再帰的な場合
平均再帰時間は ∞ の事も有限のこともあり得る
状態jが再帰的で平均再帰時間が有限
正再帰
状態jが再帰的で平均再帰時間が ∞
零再帰

正再帰・零再帰・非再帰を イメージでとらえて見よう

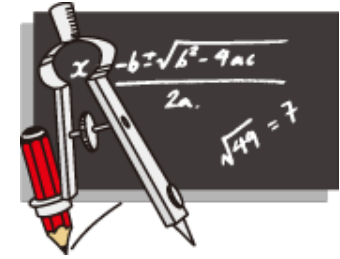


・ 例：ランダムウォーク



- ・ $p > q$:非再帰
- ・ $p = q$:零再帰
- ・ $p < q$:正再帰

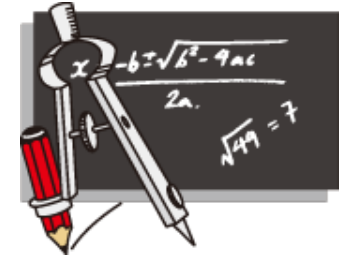
マルコフ連鎖と確率分布 1



- ・十分に長い時間が経過したとき、マルコフ連鎖の状態の確率分布はどうなるでしょうか。
- ・まず、電球の取り換え問題を例にして見ましょう。
- ・この問題での推移行列は次のような形をしていました。

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & q_3 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & q_4 \\ p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

マルコフ連鎖と確率分布 2



- ・ 観察を開始してから n ヶ月後の状態 i の電球の個数の期待値を $\nu_n(i)$ とすると、次のような漸化式が成り立ちます。

$$\nu_n(1) = p_1 \nu_{n-1}(1) + p_2 \nu_{n-1}(2) + p_3 \nu_{n-1}(3) + p_4 \nu_{n-1}(4) + p_5 \nu_{n-1}(5)$$

$$\nu_n(2) = q_1 \nu_{n-1}(1)$$

$$\nu_n(3) = q_2 \nu_{n-1}(2)$$

$$\nu_n(4) = q_3 \nu_{n-1}(3)$$

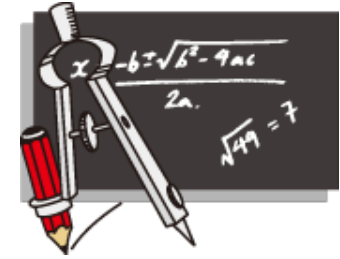
$$\nu_n(5) = q_4 \nu_{n-1}(4)$$

- ・ ということは、つまり行列の表現にすると、

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1} \mathbf{P}$$

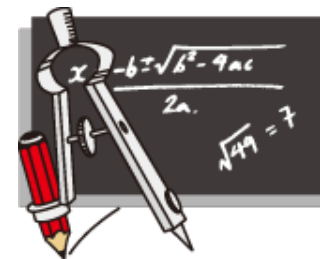
ということです。簡単ですね。

マルコフ連鎖と確率分布 3



- ある初期条件から始めて、この漸化式を繰り返して見ます。何が起きるでしょうか。
- 一定の分布に近づいていませんか。
- それでは別の初期条件から始めるとどうでしょう。
- やはり同じ分布に近づいていきますね。

定常分布と極限分布1



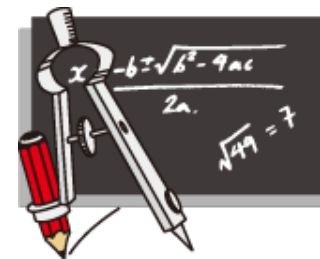
- 少し一般的に考えてみましょう。
- 推移確率行列がPのマルコフ連鎖が時刻nに状態iにある確率を $\pi_n(i)$ として、 $\pi_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \dots)$ と書くことにします。
- すると、次の漸化式が成り立ちます。

$$\pi_n = \pi_{n-1}P$$

- 初期値からnステップ繰り返すと考ええると

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

定常分布と極限分布2



- このとき、もし n を無限に大きくして π が一定値に近づいていくとすると

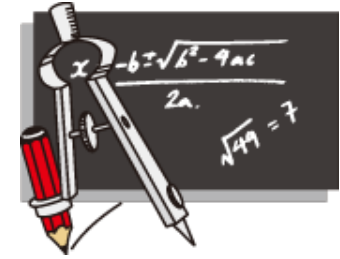
$$\pi = \pi P$$

が、成り立つはずですが。

- これを平衡方程式といいます。
- この平衡方程式を満たす π のことを、定常分布といいます。
- 電球の取り換え問題では π は次のような分布でした

$$(341, 331, 263, 58, 7)$$

定常分布と極限分布 3



- その一方でどんな π から出発しても一定の分布に収束するとすると、仮に P を繰り返し作用した極限を P^∞ と表すと

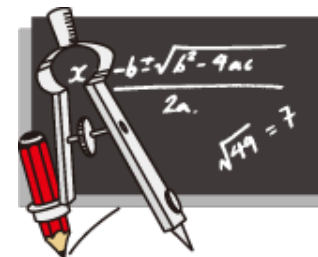
$$\pi = \pi_0 P^\infty$$

が成り立っているはずですが。

- まず、 π がどのようなものでも成立するためには P^∞ は列要素が全て等しくなければなりません

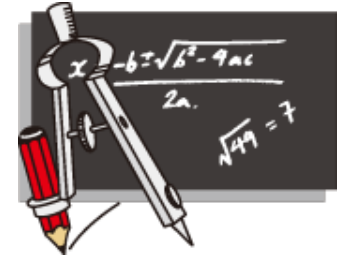
$$P^\infty = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \\ v_1 & v_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

定常分布と極限分布4



- ・ 試しに計算してみましょう。
- ・ この数字の並びどこかで覚えがありませんか。
- ・ そう定常分布と同じですね。
- ・ このように $n \rightarrow \infty$ で P^∞ が極限に近づくとき、 P^∞ の列要素の分布を極限分布といいます。
- ・ 極限分布が存在するときには、必ず定常分布が存在しますが、定常分布が存在しても極限分布が存在するとは限りません。

周期的マルコフ連鎖



- さてそれでは、次のような場合を考えてみましょう。
- 2つの状態だけからなり、遷移確率行列は次の通りです。

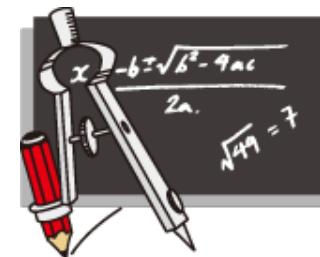
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- さて極限分布は存在しますか？

$$P^2 = I \quad P^3 = P \quad P^4 = I \quad P^5 = P$$

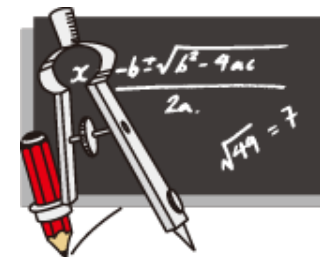
- 存在しませんね。
- では、 $\pi = (0.5, 0.5)$ を試してみてください。
- そう、定常分布は存在します。

極限分布・定常分布と再帰性 1



- ・ まず、マルコフ連鎖の状態が全て非再帰であるなら、当然戻ってこないわけですから、極限分布も定常分布も存在しません。
- ・ 次に、マルコフ連鎖の状態が全て零再帰であるなら、極限では戻ってきますが、その遷移確率は極限で0ですから、分布は全て0でなければならず、これまた極限分布も定常分布も存在しません。
- ・ ですから、正再帰の状態だけが極限分布・定常分布をも持ちえるわけです。

極限分布・定常分布と再帰性 2



- ・ 正再帰とそうでない部分を両方持っているとしたらどうでしょう。
- ・ 仮に次のように書いて見ます。

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right] = P$$

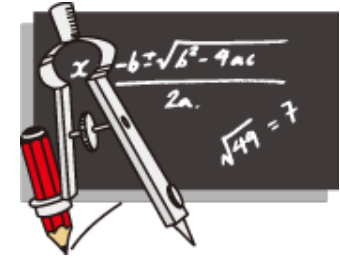
- ・ ただし正再帰な同値類は閉じていましたから、Pの右側は0のはずで、このことから平衡方程式は以下ようになります。

$$\pi_1 = \pi_1 P_1 + \pi_2 Q$$

$$\pi_2 = \pi_2 R$$

- ・ 正再帰でない状態の遷移確率は極限で0なので、 π_2 は全て0です。
- ・ つまり正再帰の部分だけ考えれば良いことになります。

極限分布・定常分布と再帰性 3



- 正再帰な同値類は全て閉じていますから、正再帰な同値類を複数含む場合、推移確率行列は以下のような形になります。

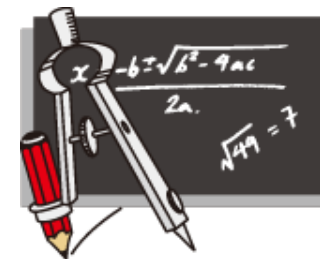
$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & P_2 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- そして定常分布は、それぞれの平衡方程式の解を並べて次のようになります。

$$\pi_1 = \pi_1 P_1, \quad \pi_2 = \pi_2 P_2, \quad \cdots$$

$$\pi_w = (w_1 \pi_1 : w_2 \pi_2 : \cdots)$$

極限分布・定常分布と再帰性 4

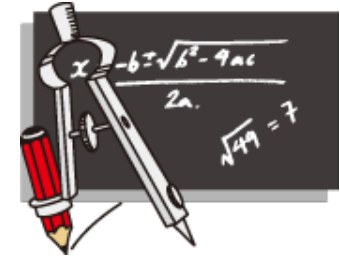


- 正再帰な同値類を複数含む場合、推移確率行列は以下のような形になりました。

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & P_2 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- 極限分布を考えると、列成分が全て等しくなるのは、0しかありません。
- ということは、極限分布が存在するためには、推移確率行列が正再帰であって、且つ既約（一つの同値類からなる）必要があることになります。

まとめ



- ・ 到達可能
- ・ 推移グラフ
- ・ 同値類
- ・ 周期
- ・ 平均到達時間と平均再帰時間
- ・ 正再帰・零再帰・非再帰
- ・ 定常分布と極限分布