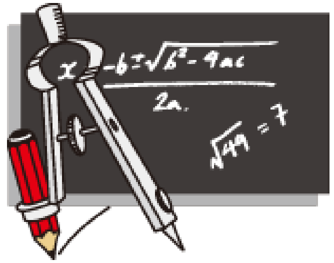
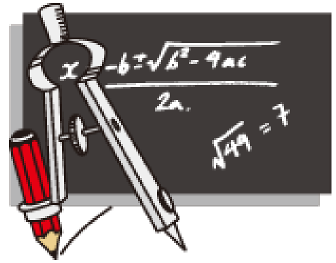


応用数学III
(6) 確率過程の基礎１

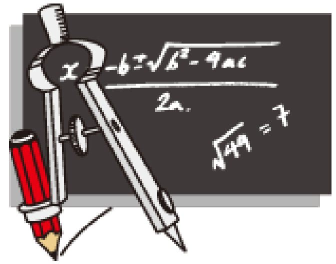
木村真一

講義のスケジュール



(1)　確率の基礎
(2)　確率変数と確率分布
(3)　いろいろな確率分布
(4)　多次元確率分布
(5)　大数の法則と中心極限定理
(6)　確率過程の基礎１
(7)　確率過程の基礎２
(8)　フーリエ解析
(9)　フーリエ変換の性質
(10)　相関解析
(11)　群・環・体の定義
(12)　準同型写像
(13)　Nを法とする合同式
(14)　線形代数

休講及び補講

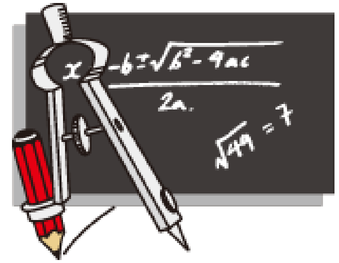


- 以下の講義は都合により休講させていただきます。
  - 11月2日
  - 11月9日

- 補講についてはそれぞれ以下の予定で対応いたします。
  - 11月30日：1時限目　K401教室
    - 電気磁気測定II（松田先生）と交代
  - 12月14日： 1時限目　K401教室
    - 電気磁気測定II（松田先生）と交代

- ご不便をおかけしますがよろしくお願いいたします。

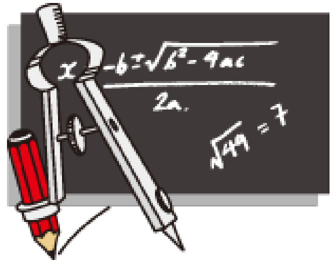
授業改善のためのアンケート



- 「授業改善のためのアンケート」（後期第１回）が実施されています。本講義も対象科目となっております。
- 「授業改善のためのアンケート」は学生諸君と教員の授業に関するコミュニケーションの場です。授業改善に向け、積極的な参加をお願いします。
- 回答はCLASSシステムにログインして行うことができます。
- ご協力をお願いいたします。

- 学生回答期間　10月22日（月）〜11月2日（金）

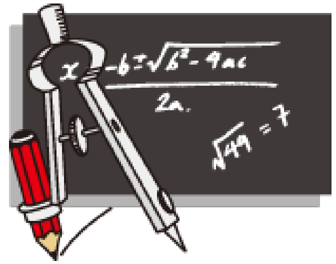
さて次は何でしょう



- 唐突ですがクイズです。次には何が来ますか

- １，３，５．７，９、１１
  そう１３ですね。
- １，２，４、８．１６，３２
  そう６４ですね。
- １，１、２，３，５，８，１３，２１
  そう３４ですね。
- １，２、４、２，１、２，４，２，１、２
  そう４ですね。

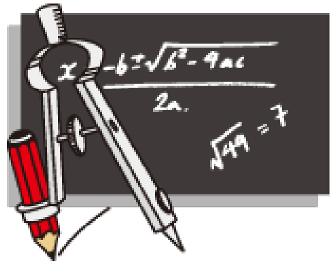
唐突ですが「しりとり」



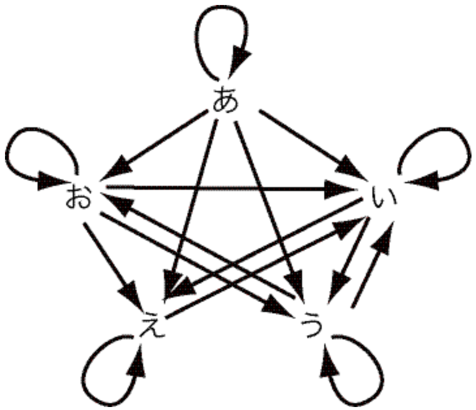
- さて、唐突ですがしりとりについて考えてみてください。
  - 考えて見ればなぜしりとりが遊びとして成立するのでしょうか。
  - いつも同じ結果であっては遊びとして成立しません。
  - しかし、一定の法則がなければこれまた遊びとして成立しません。

- さて、では2文字しりとりはどうでしょう。
- 次に、3文字しりとりでは。
  - どんどん難しくなるのはなぜでしょう。

2文字ことば



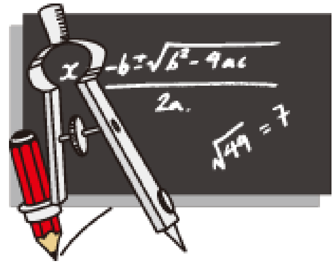
- それでは仮に「あ、い、う、え、お」の5文字を用いた2文字の言葉だけを使ってしりとりができますか？



	あ	い	う	え	お
あ	○				
い	○	○	○	○	○
う	○	○	○		○
え	○	○	○	○	○
お	○		○		○

- さてこんな言語を使っているとき、１文字目に「あ」を受信したとして、単語としてどんな可能性がありますか。
- １文字目に「え」ならどうでしょう。
- どちらが確率的（情報的）に価値がありますか？

確率過程



- 確率過程とは

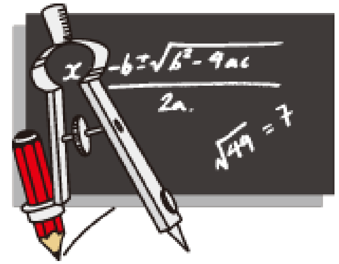
  時間変化する確率変数のことです。

  別の言い方をすると

  確率的に規定された時間変化のことです

- 逆に先にあげた数列の例ように、時間変化がある関係式によって完全に決まっている過程のことを確定過程といいます。

マルコフ連鎖

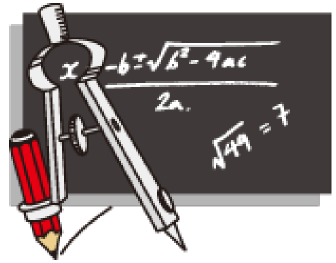


- 全てのn≧0に対して次の関係が成り立つとき、確率過程はマルコフ連鎖といいます。

$$P\left(X_{n+1}=j \middle| X_1,.....,X_n\right)=P\left(X_{n+1}=j \middle| X_n\right)$$

- この関係式が意味するとことは、「その過程の将来状態の条件付き確率分布が、現在状態のみに依存し、過去のいかなる状態にも依存しない特性を持つ」と言うことで、これをマルコフ性と言います。
- 平たく言うと「今の状態で次が決まる」ということです。
- （何と行き当たりばったりな.....）

マルコフ連鎖（つづき）



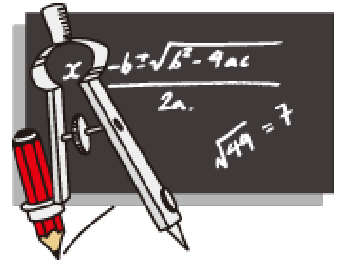
- 一般にはここでの確率はnによって変わっても構わない、つまり時間変化してもよいのですが、ここでは　時間に対して不変の場合に限定して考えます。（これを時間的に斉次と言います。）
- 時間的に不変なので次のように書いて構いません。

$$P\left(X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right)=P(i,j)$$

- このP(i,j)は状態iから状態jへの推移確率と呼ばれます。
- 遷移確率はよく遷移確率行列Pの形で表現されます。

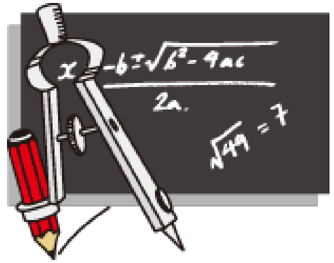
$$P=\begin{bmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \dots \\ P(2,1) & P(2,2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ランダムウォーク

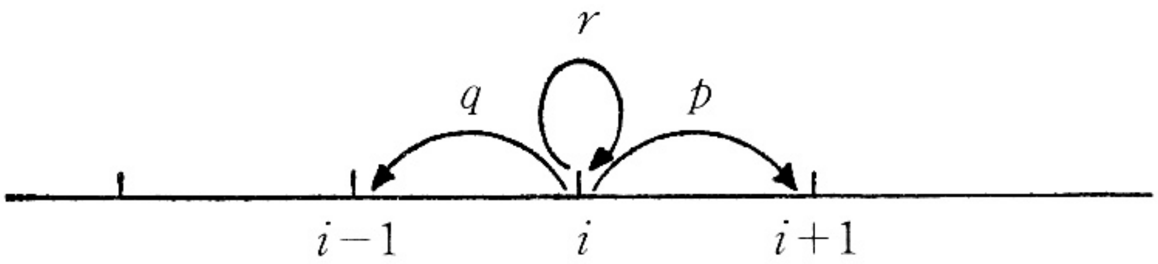


- マルコフ連鎖の具体的な例を挙げて見ましょう。
- 直線上に等間隔に並んでいる点の上を運動する粒子を考えます。点それぞれに番号をつけて、粒子のいる場所の番号を、「状態」とします。
- ある時刻nに状態iにいた粒子が、次の時刻n+1に右隣の状態i+1に移動する確率をp、左隣の状態i-1に移動する確率をq、そのままとどまる確率をr=1-p-qとします。
- 既にお気付きのように、次の時刻の状態の存在確率が、現在の時刻の状態飲みで決まっていますから、典型的なマルコフ連鎖です。

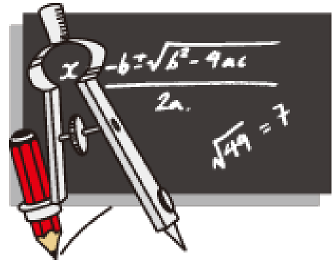
ランダムウォーク２



- これは物理学ではとてもよくお目にかかる問題です。
- 粒子の移動範囲については、左右無限に許可する場合も、特定の「壁」を拘束条件として用いる場合もあります。
  - 吸収壁：粒子が到達するとそこから離れられなくなる壁です。
  - 反射壁：粒子が到達したときそこから跳ね返ります。
    - 完全反射壁：粒子は全て跳ね返されます。
    - 不完全反射壁：粒子の一部はとどまります。



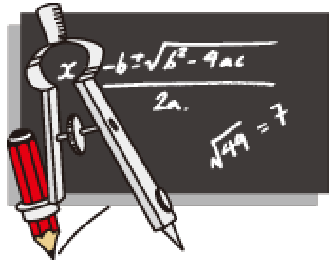
ランダムウォーク３



- さてそれではランダムウォークの推移行列を書いて見ましょう。
- とりうる状態をS={0,1,2,3,4}とします。
- 0が吸収壁、4が完全反射壁としましょう。
- 推移行列を書いて見てください。

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & p-q & p & 0 & 0 \\
0 & q & p-q & p & 0 \\
0 & 0 & q & p-q & p \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

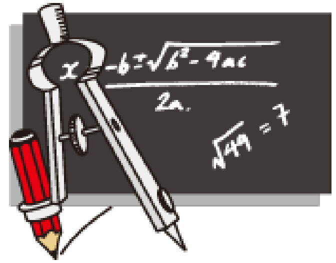
優勝者決定戦１



- A,B,C3人の間で囲碁（でなくてもいいのですが）の優勝者を決めることになりました。
- はじめにAとBが対戦してAが勝った。次にAとCが対戦してAが勝てばAの優勝、Cが勝てばCとBで対戦。
- このように最初に2連勝したものが優勝とするときこのプロセスはマルコフ連鎖で書けます。

- AとCが対戦する状態をACとします。
- Aが二連勝して優勝する状態をA2とします。
- 状態ACの後に起こりうるのは、A2かBCです。

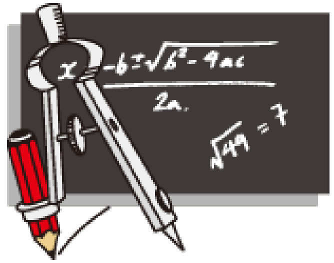
優勝者決定戦２



- AがBに勝つ確率、BがCに勝つ確率、CがAに勝つ確率をそれぞれp,q,rとします。
- さて、マルコフ連鎖の推移確率行列を書いて見てください。

$$
\begin{array}{c}
 \\
AC \\ CB \\ BA \\ A^2 \\ B^2 \\ C^2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} AC, & CB, & BA, & A^2, & B^2, & C^2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & r & 0 & 1-r & 0 & 0 \\
0 & 0 & q & 0 & 0 & 1-q \\
p & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

電球の取り換え問題１



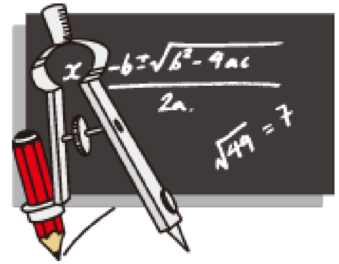
- ある工場に1000個の電球が取り付けられてます。切れた電球は月末にまとめて交換します。
- 過去の統計によると、新しい電球を取り付けてから経過月数ごとの取り換え数は下の表のようになっています。
- つまり、１ヶ月後には3%が切れていて、2ヶ月後には20%....、5ヶ月以上持つ電球はないそうです。

- 任意に選んだ電球に着目し、毎月取り換える時の経過月数はマルコフ連鎖になります。

電球の取り替え率

経過月数	取り替え率
1	0.03
2	0.20
3	0.60
4	0.15
5	0.02

電球の取り換え問題２



- さあ、取り合えた後の経過月数{1,2,3,4,5}を状態として、推移確率行列を求めて見てください。

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & q_3 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & q_4 \\ p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_5 = 1$$

$$p_i + q_i = 1$$

$$p_1 = 0.03$$

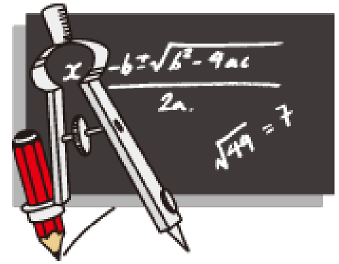
$$q_1 p_2 = 0.20 = (1 - 0.03) p_2$$

$$p_2 = 0.206$$

$$q_1 q_2 p_3 = 0.60 = (1 - 0.03)(1 - 0.206) p_3$$

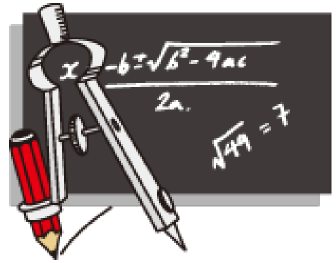
$$p_3 = 0.779$$

電球の取り換え問題３



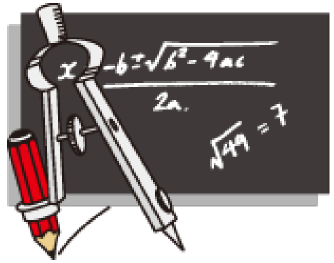
$$
\begin{bmatrix}
0.03 & 0.97 & 0 & 0 & 0 \\
0.206 & 0 & 0.794 & 0 & 0 \\
0.779 & 0 & 0 & 0.221 & 0 \\
0.881 & 0 & 0 & 0 & 0.119 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

ギャンプラーの破産問題１



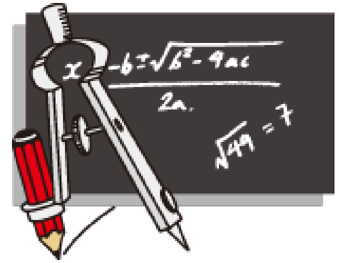
- 確率p=0.4で1ドルの勝ち、確率1-p=0.6で1ドルの負けとなるギャンブルを考えて見ましょう。
- プレーヤーは所持金がなくなるかNドル稼いだ時点でゲームをやめるとします。
- n回ゲームを行ったときの所持金Xnはマルコフ連鎖になります。
- N=5の時の推移確率行列を求めて見てください。

ギャンプラーの破産問題２



$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

チャップマン・コルモゴロフの方程式１

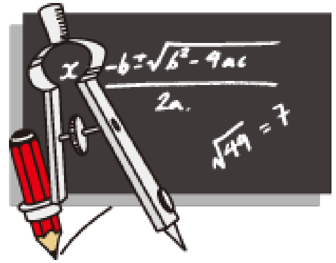


- マルコフ連鎖で与えられる確率P(i,j)とは、ある時刻nにある状態iにあったものが、次の時刻n+1に状態jに移る確率でした。
- では、次の時刻n+1ではなく,その次つまりn+2での関係はどうなっているでしょう。

$$P\left(X_{n+2}=j \middle| X_n=i\right)$$

- この場合、次の時刻には、確率の高い低いにかかわらず、iから行けて、jに到達できるあらゆる、状態を経由することができます。

チャップマン・コルモゴロフの方程式２

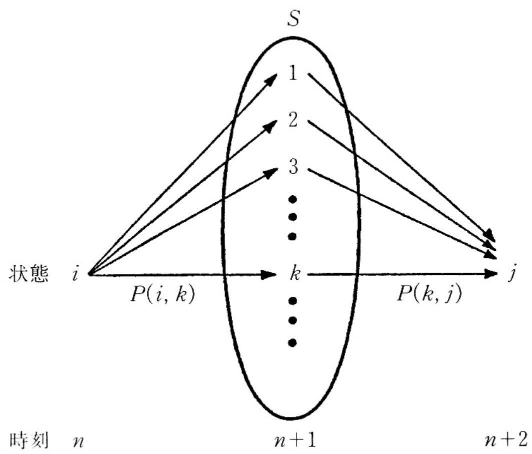


- つまり、次のように計算することができます。

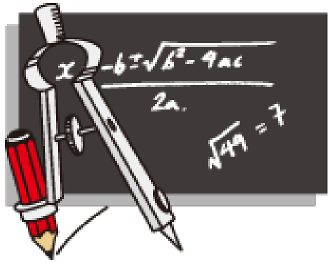
$$P\left(X_{n+2}=j\middle|X_n=i\right)=\sum P\left(X_{n+1}=k\middle|X_n=i\right)P\left(X_{n+2}=j\middle|X_{n+1}=k\right)$$
$$=\sum P(i,k)P(k,j)$$

- この式の右辺は推移確率行列の二乗を計算したときの各要素になっています。
- この関係は3ステップ以上に容易に拡張できて、mステップで以下のようになります。

$$P^{(m)}(i,j)=P\left(X_{n+m}=j\middle|X_n=i\right)$$



チャップマン・コルモゴロフの方程式３



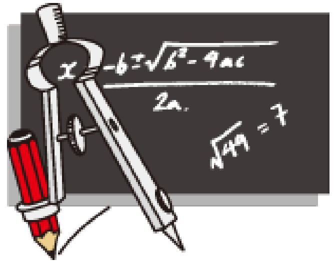
- つまり、mステップの推移確率行列は、推移確率行列のm乗に同じです。

$$P^{(m)} = P^m$$

- ここで0乗を以下のように定義するとm=0についても成り立ちます。

$$i = j \rightarrow P^{(0)}(i,j) = 1$$
$$i \neq j \rightarrow P^{(0)}(i,j) = 0$$

チャップマン・コルモゴロフの方程式4



- 行列の性質から次のようになります。

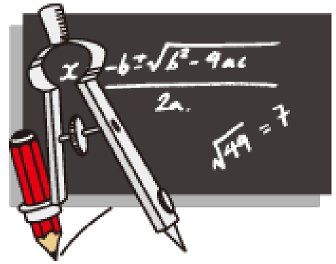
$$P^{m} = P^{l} P^{m-l}$$

$$P^{(m)} = P^{(l)} P^{(m-l)}$$

$$P^{(m)}(i,j) = \sum P^{(l)}(i,k) P^{(m-l)}(k,j)$$

- これをチャップマン・コルモゴロフの方程式といいます。

到達可能

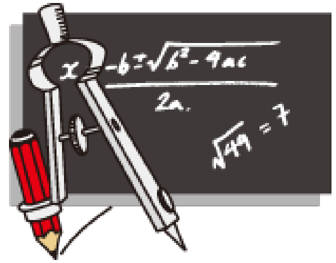


- ある状態iにあったものが、何ステップか時間が経過したときに状態jになると言う場合を考えましょう。これはいつも可能なわけではありません。
- $P^{(m)}(i,j)>0$　となるn≧０が存在するときに、状態jは状態iから到達可能であるといいます。
- これを記号で次のように表します。

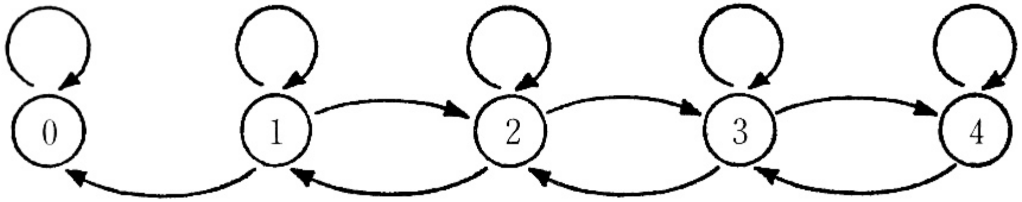
$$i \to j$$

- つまり確率の大きさはともかくとして、状態iから出発した時に状態jになる可能性があるということです、

推移グラフ

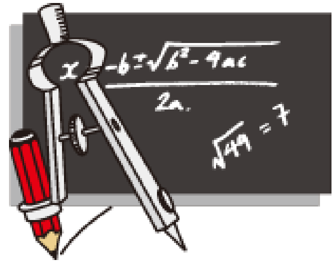


- 到達可能性を考えるときに、次のような推移グラフを用いると便利です。
- 先のランダムウォークの推移グラフの例を次に示します。



- マルコフ連鎖でとりうる状態を全て節点で表し、P(i,j)>0が成り立つ全ての状態の組に対応して、節点iから節点jへの矢印つき枝を描きます。
- グラフ上で節点iから節点jに到達する道（有向道）が１本以上あるとき到達可能です。

相互到達可能

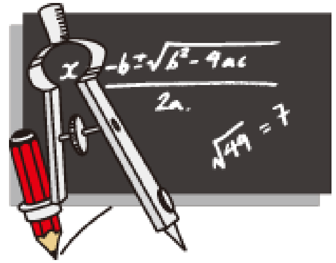


- 状態iから状態jに到達可能で、かつ状態jから状態iに到達可能である場合には、iとjは相互到達可能であるといいます。次のように表します。

$$i \leftrightarrow j$$

- 相互到達可能であれば次の定理が成り立ちます。
  - 反射律　$i \leftrightarrow i$
  - 対象律　$i \leftrightarrow j$　ならば　$j \leftrightarrow i$
  - 推移律　$i \leftrightarrow j$　かつ　$j \leftrightarrow k$　ならば　$i \leftrightarrow k$
- これを同値関係といいます。

同値類

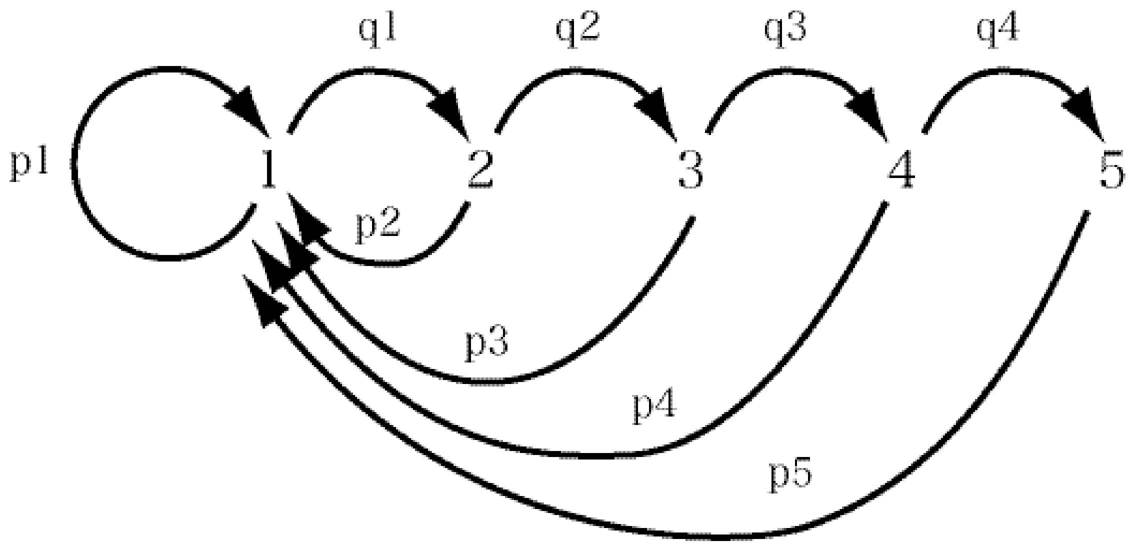


- 相互到達可能な状態の集まりを同値類といいます。
- 全ての状態は同値類に一意にわけることができます。
- 同一の同値類に属する状態同士は相互到達可能です。
- 別の類に属する状態同士は相互到達不可能です。ただし、一方的に到達可能なことはあります。
- 全ての状態が一つの同値類にまとまってしまう場合、このマルコフ過程は既約であるといいます。これはグラフ理論の言葉で言うと推移グラフが強連結であるとなります。

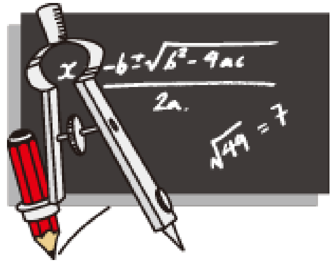
推移グラフ：電球の取り換え問題

- 試しに、先の電球の取り換え問題について推移グラフを描いて見てください。

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & q_3 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & q_4 \\ p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

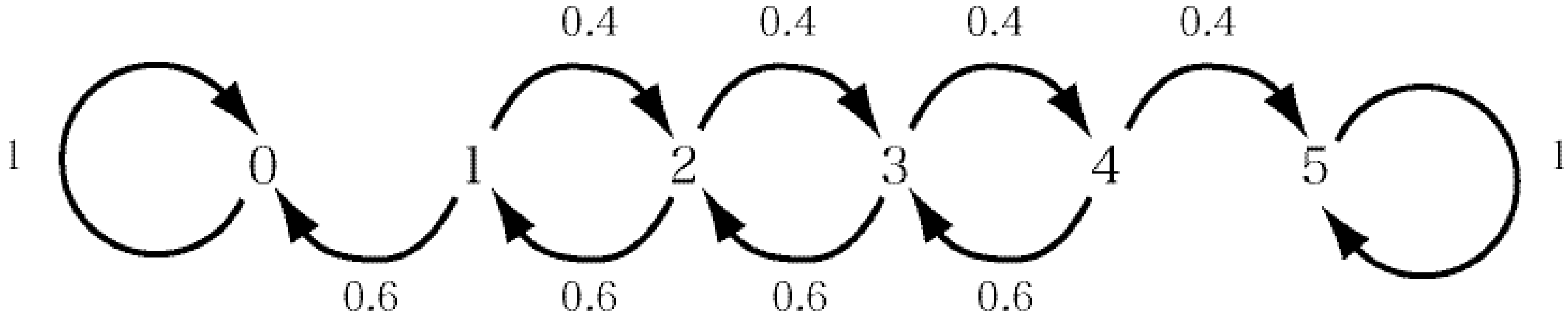


推移グラフ：ギャンブラーの破産問題

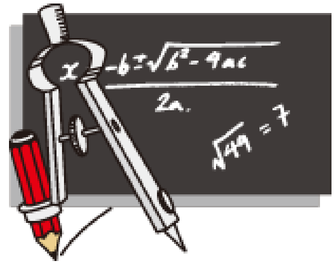


- つづいて、ギャンブラーの破産問題についても推移グラフを描いて見ましょう。

$$
\begin{bmatrix}
1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0
\end{bmatrix}
$$



まとめ



- 確率過程
- マルコフ連鎖
  - ランダムウォーク
  - 電球の取り換え問題
  - ギャンブラーの破産問題
- チャップマン・コルモゴロフの方程式
- 推移確率行列
- 相互到達可能
- 同値類
- 推移グラフ