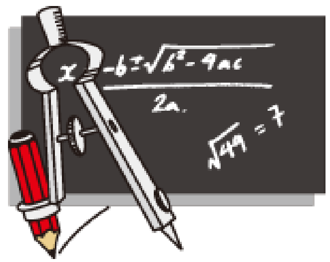
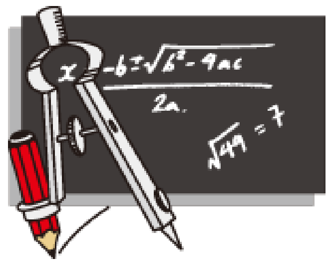


応用数学III
(3)いろいろな確率分布

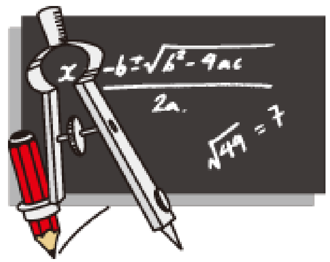
木村真一

講義のスケジュール



(1)　確率の基礎
(2)　確率変数と確率分布
(3)　いろいろな確率分布
(4)　多次元確率分布
(5)　大数の法則と中心極限定理
(6)　確率過程の基礎１
(7)　確率過程の基礎２
(8)　フーリエ解析
(9)　相関関数
(10)　群・環・体の定義
(11)　準同型写像
(12)　Nを法とする合同式
(13)　線形代数１
(14)　線形代数２

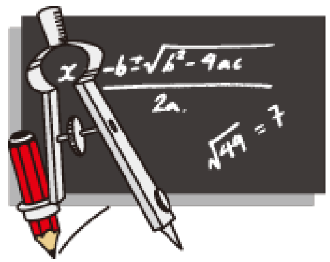
前回の復習：ベイズの定理の例題



- ある会社が検査方法を開発し、ある病気Uにかかっているとき99%でかかっていると判断する事ができる。ただし、非常に低い確率で1%であるが、かかっていない人を、ある病気Uにかかっているとご判断してしまうという。この病気にかかる確率が1%として、この検査は信用できますか。

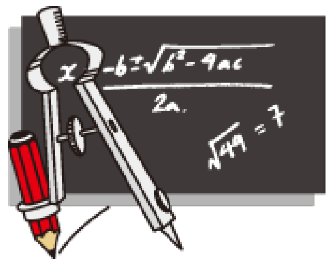
$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}=\frac{1/100\times 99/100}{1/100\times 99/100+99/100\times 1/100}=\frac{1}{2}$$

前回の復習：確率密度関数と分布関数



- **確率密度関数** $P\left(a < x \le b\right) = \int_a^b f\left(t\right)dt$
- **分布関数** $F\left(x\right) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^x f\left(t\right)dt$
- **平均** $\mu = E\left[X\right] = \int xf\left(x\right)dx$
- **期待値** $E\left[g\left(X\right)\right] = \int g\left(x\right)f\left(x\right)dx$
- **分散** $\sigma^2 = V\left[X\right] = \int \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right)dx = E\left[X^2\right] - \mu^2$

離散型一様分布



- サイコロで出た目ように離散型確率変数Xが全て等確率をとる確率分布

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

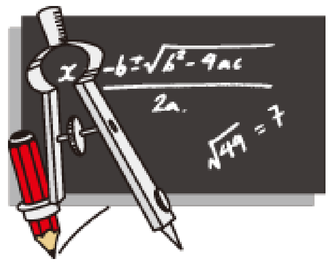
- 平均

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

- 分散

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

ベルヌーイ分布

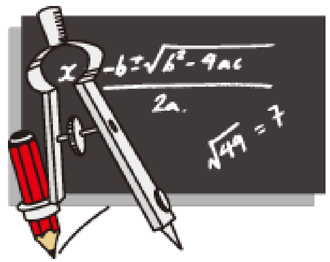


- コインを1枚投げて表が出たら1、裏が出たら0という数字を割り当てます。
- XはX=0かX=1のいずれかの値だけをとるとして、次のような確率分布を定義することができます。（ちょっと大げさですが、次の2項分布への橋渡しです。）

$$f(x) = P(X = x) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

- ここで、θ はコインの表が出る確率で、生起確率と言います。 θ は必ずしも1/2である必要はありません。
- このような確率分布をベルヌーイ分布といいます。

ベルヌーイ分布の平均と分散



- さて、ベルヌーイ分布の平均と分散はそれぞれどのようになるでしょうか。計算してみてください。
- 実に簡単ですね。
- 平均

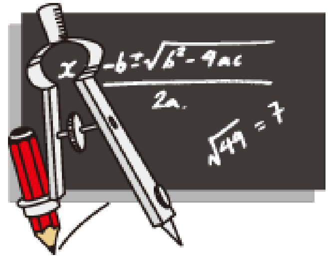
$$\sum xf(x) = 1\cdot\theta^1(1-\theta)^{1-1} + 0\cdot\theta^0(1-\theta)^{1-0} = \theta$$

- 分散

$$\sum\left(x-\bar{x}\right)^2 f(x) = (1-\theta)^2\cdot\theta^1(1-\theta)^{1-1} + (0-\theta)^2\cdot\theta^0(1-\theta)^{1-0}$$

$$= \theta(1-\theta)$$

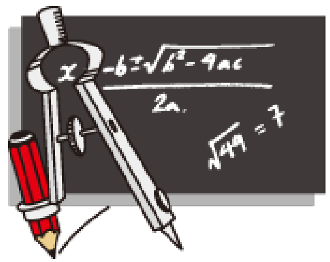
二項分布



- さて、今度はコイン投げ（かっこよくベルヌーイ過程と言います。）をn回続けることを考えてみましょう。
- n回続けますと、0と1の数字の並びが得られます。
- 一つの数字の並びの確率は　$\theta^x (1-\theta)^{n-x}$　になります。
- ここでは表が出た回数を確率変数として取り扱います。つまり001010と010001は同じくX=2です。
- とすると、n個の数字の並びで、x個の1を含む組み合わせは全て同じく確率変数X=xとして足し合わせる必要があります。このような組み合わせは....

$$
{}_nC_x = \frac{n!}{(n-x)!x!}
$$

二項分布（つづき）

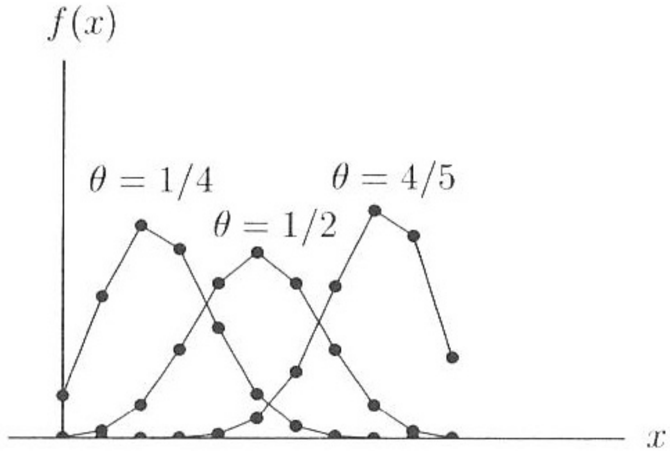


- このようにして得られる確率分布を、二項分布といいます。

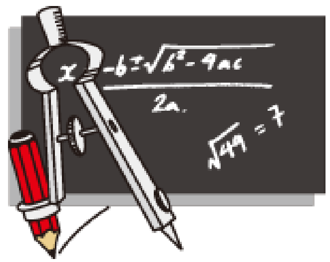
$$f(x)=P(X=x)=\frac{n!}{(n-x)!x!}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$X\sim B(n;\theta)$$

- この密度関数の形は右のようになります。



二項分布（さらにつづき）



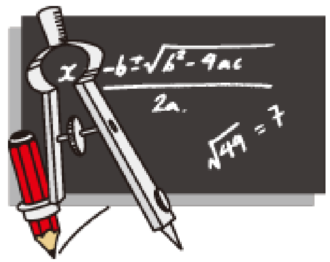
- 二項分布が確率分布であるためには次の条件を満たす必要があります。

$$\sum f(x) = 1$$

- 本当に満たしていますか？
- ヒント：二項定理 $(a+b)^n = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} a^x b^{n-x}$

$$\sum f(x) \quad = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad = \{\theta + (1-\theta)\}^n = 1$$

二項分布の平均と分散



- 二項分布の平均と分散を計算してみてください。

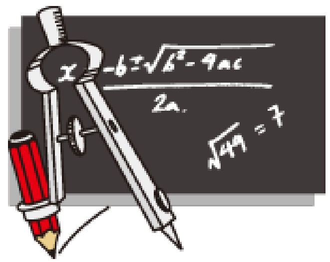
- これも意外と簡単ですね。
- 平均

$$n\theta$$

- 分散

$$n\theta\left(1-\theta\right)$$

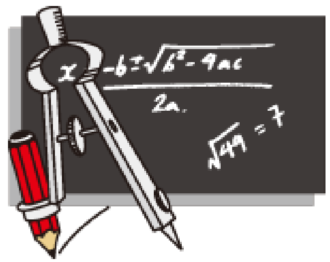
ポアソン分布



- 二項分布でnがものすごく大きくなることを考えてみましょう。
- 平均はnθでしたから、単純に回数を増やすとθが一定ならば、平均もそれに比例して大きくなってしまいます。これでは良くない。
- そこで平均を一定値λに保った状態で、nを大きくしていきます。
- つまり、θは小さくなります。ただし、ですが零ではありません。

$$0 < \lambda = n\theta < \infty$$

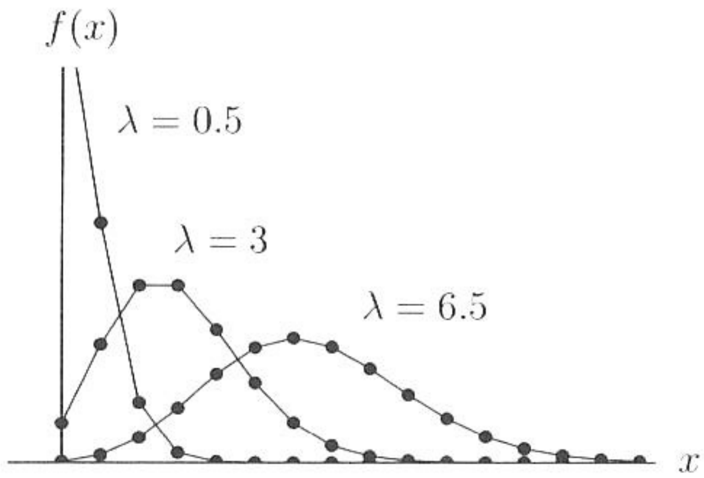
ポアソン分布（つづき）



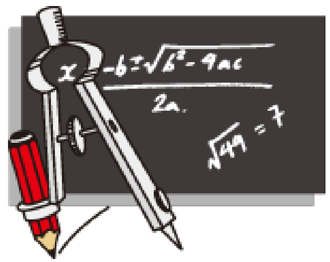
- このとき二項分布は次のような分布に収束します。

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, X \sim Po(\lambda)$$

- これをポアソン分布といいます。
- 導出できますか？
- 分布の形の例を
右に示します。



ポアソン分布の平均と分散



- ポアソン分布の平均と分散を計算してみてください。
- 実は単純でしょ。
- 平均

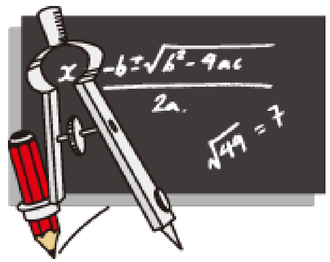
$$\lambda$$

- 分散

$$\lambda$$

- ポアソン分布は、生起確立θがとても小さいけど、試行する回数が数えられないぐらい多い（故にnが決まらないので二項分布が使えない）時に役に立ちます。
- 「馬にけられて死んだ兵士の数」の議論から出てきたそうです。
- 大量生産しているものの不良品や、交通事故での死亡者数等でも利用されます。

連続型一様分布



- 不連続型で定義した一様分布を連続型に拡張します。
- ある区間a<x<bで一様にどれかの値をとるとき、一様分布として、確率密度関数は以下のようになります。

$$f(x)=\frac{1}{b-a}, X \sim U(a,b)$$

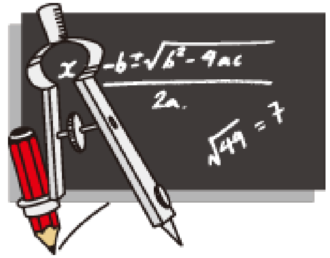
- 平均と分散は？
- 平均

$$\frac{a+b}{2}$$

- 分散

$$\frac{(b-a)^2}{12}$$

指数分布

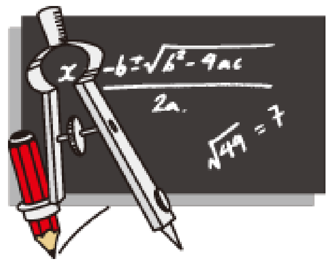


- 銀行の窓口にお客さんが到着する時間間隔の分布を考えます。
- あるお客さんが来たあと、次のお客さんが来るまでにx分以上の時間が空いたとして、さらにx+y分以上の間が開く確率は、最初からy分の間が開く確率と変わりません。
- これを確率の表現で表すと次のようになります。

$$P\left(X > x + y \middle| X > x\right) = P\left(X > y\right)$$

- これを無記憶性といいます。

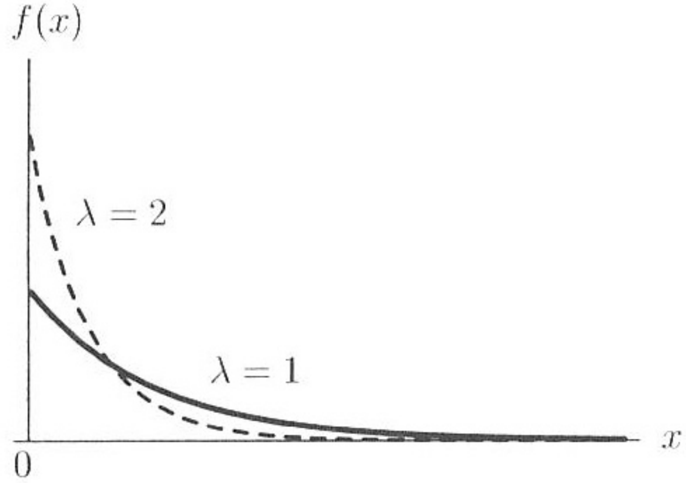
指数分布（つづき）



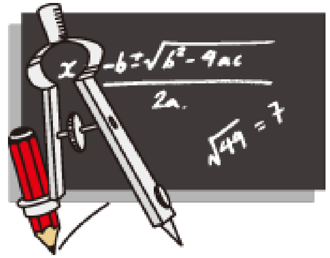
- このような無記憶性がある場合、確率密度関数の形は必ず次のような形をとります。

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, X \sim Ex(\lambda)$$

- このような分布を指数分布といいます。
- 導出してみてください。
- 典型的な指数分布の形を以下に示します。



まとめ



- 一様分布
- ベルヌーイ分布
- 二項分布
- ポアソン分布
- 指数分布