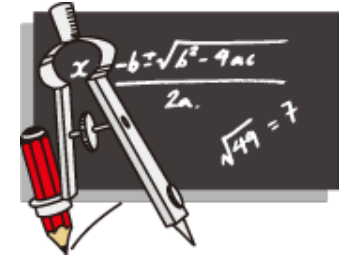


応用数学III

(2) 確率変数と確率分布

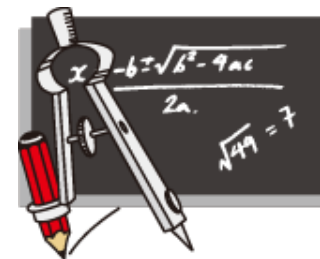
木村真一

講義のスケジュール



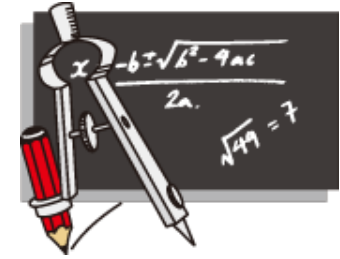
- | | |
|------------------|-------------------|
| (1) 確率の基礎 | (8) フーリエ解析 |
| (2) 確率変数と確率分布 | (9) 相関関数 |
| (3) いろいろな確率分布 | (10) 群・環・体の定義 |
| (4) 多次元確率分布 | (11) 準同型写像 |
| (5) 大数の法則と中心極限定理 | (12) N を法とする合同式 |
| (6) 確率過程の基礎 1 | (13) 線形代数 1 |
| (7) 確率過程の基礎 2 | (14) 線形代数 2 |

講義試料のWeb公開



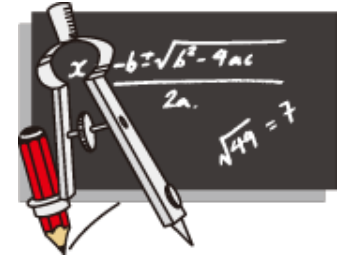
- 復習に使っていただけるように講義試料を以下のページで公開いたしました。
- <http://www.rs.noda.tus.ac.jp/skimura/AppMath3/AppMath3.html>
- 適宜お使いください。

前回のまとめ



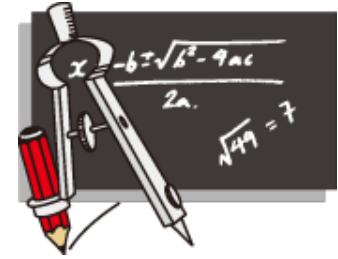
- ・ 事象、全体事象、空事象、和事象、積事象
- ・ ド・モルガンの法則
- ・ 結合・分配定理、加法定理
- ・ 数学的確率と経験的確率
- ・ 条件付き確率と乗法定理
- ・ 独立性
- ・ 全確率の定理
- ・ ベイズの定理

独立の例題

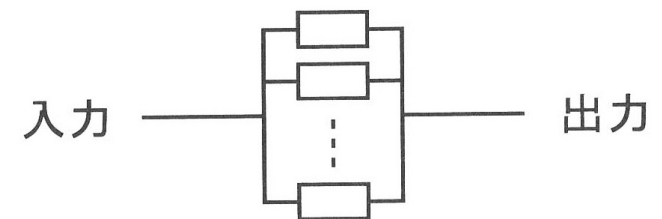
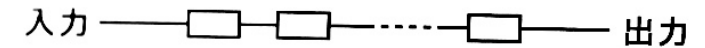


- 52枚の一組のトランプから無作為に1枚抜き取るとき、ハートの絵札がでる確立を求めよ。また、「ハートがでる」という事象と「絵札がでる」という事象は独立であることを示せ。

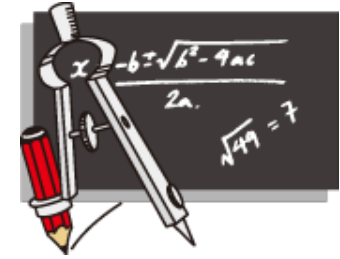
確率計算の例題



- 故障率が等しく p である機械が右図のように直列に接続されて機能しているとき、システム全体の故障確率は？
- 故障率が等しく p である機械が右図のように並列に接続されて機能しているとき、システム全体の故障確率は？

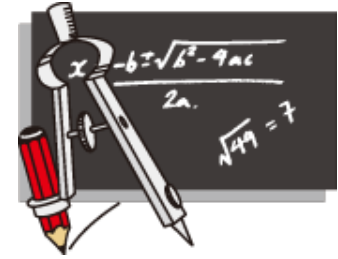


ベイズの定理の例題



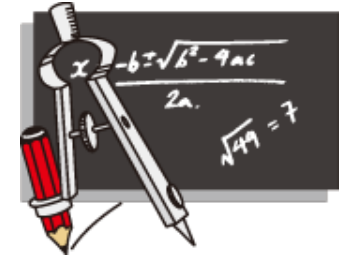
- ある会社が検査方法を開発し、ある病気Uにかかっているとき99%でかかっていると判断する事ができる。ただし、非常に低い確率で1%であるが、かかっていない人を、ある病気Uにかかっているとご判断してしまうという。この病気にかかる確率が1%として、この検査は信用できますか。

確率変数



- ・ 前回はある事象を設定して、その事象がおきるおきやすさに対応する確率を定義しました。
- ・ この事象について、もちろん「赤玉がでる」とか、は無理ですが、「1の目が出る」などは数字と対応づけられそうです。
- ・ 数字ならば、数字と数字の関係なので数学としては取り扱いがぐっと楽になります。
- ・ そう、数字の関係なので関数となります。

確率変数

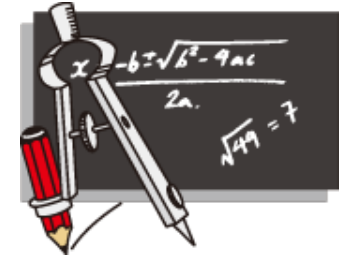


- ・ まずサイコロのでる目の数を取り扱います。
- ・ でる目の数を変数として扱うことにして確率を次のように表します。

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, (x = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

- ・ このXの事を確率変数といいます。
- ・ サイコロの場合、1から6までの整数で、加算個の離散値ですから、特に離散型といいます。

確率関数



- さて変数の準備ができましたから、この変数を使って次のような関数を定義します。

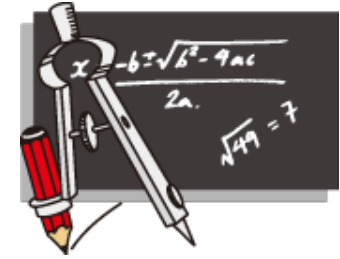
$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), (x = x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0, (x \neq x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

- このとき、当然以下の条件を満たすことが必要です。

$$f(x) \geq 0, \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

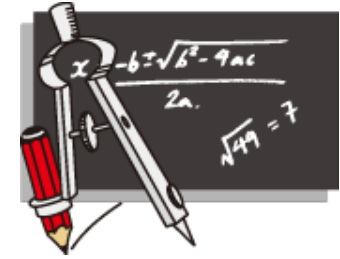
- このように定義された関数のことを、確率関数といいます。

確率密度関数



- さて数字の世界まで来たのですから、加算個の整数という特別な場合だけでなく、連続的な数字を扱いたくなります。
- 私たちが計測したりする物理現象は連続値ですから。
- ところが、計測をしたときに、ある実数値の数値が得られる確率というのはとても考えにくいです。
- 何しろドンピシャその数値がでるという確率は考えにくいですし。
- そこで、次のような関数を考えることにします。

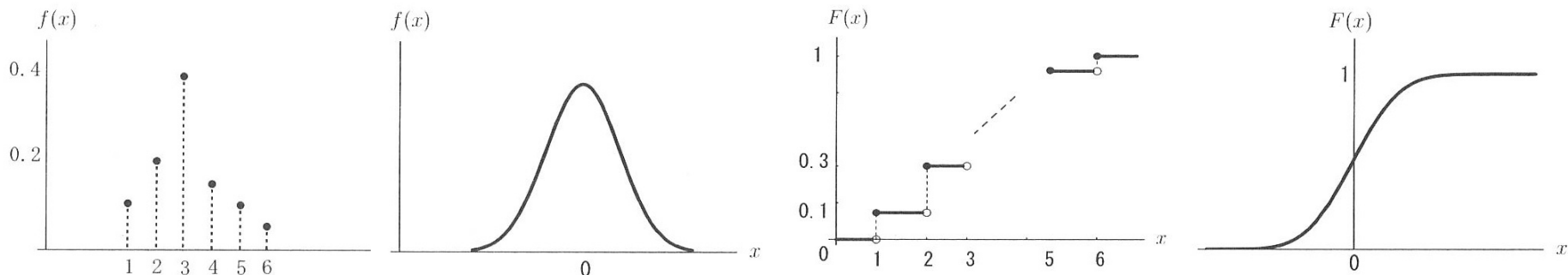
確率密度関数



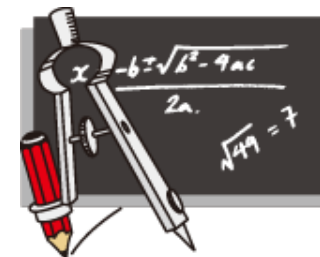
$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

$$f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

- これを確率密度関数と呼びます。



分布関数



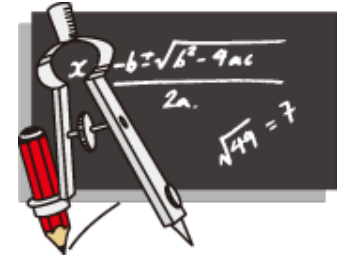
- 問題によっては、確率密度関数を累積して考えた方が便利なこともあります。
- 何しろ考えたい値を放り込むだけで、積分を取らなくても確率がわかりますから。
- そこで次のような関数を定義します

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

- これを分布関数といいます。

分布関数



- ここで離散型の密度分布の場合

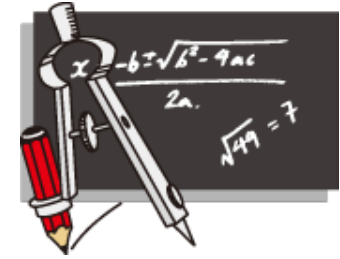
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- このことからわかるように、ある範囲の値をとる確率は

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$

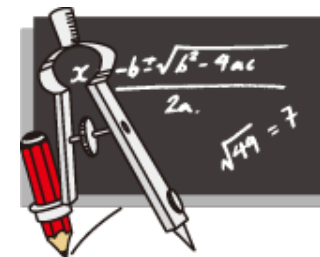
となります。

演習問題 1



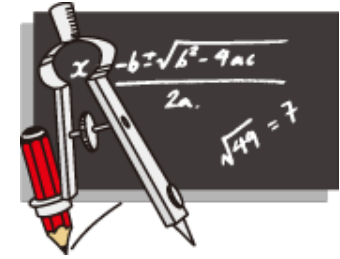
- 確率密度関数 $f(x) = 1/2$ が、 $0 \leq X \leq 2$ で定義されているとき、 $P(1 < X \leq 2)$ 、 $P(X=1)$ を求めよ。

演習問題2



- 確率密度関数 $f(x) = 1 - |x|$ が、 $-1 \leq X \leq 1$ で定義されている。このときの $P(-0.5 < X < 0.5)$ を求めよ。

平均

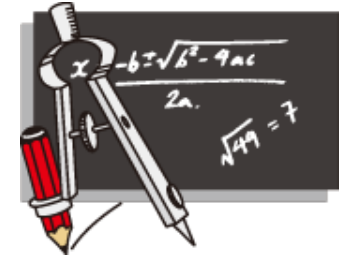


- ・サイコロの例で、でる目の「平均」はどのように求めますか。
- ・「でる目」×「その目のでる確率」を全て足す、というのが最も自然です。
- ・これを一般化するならば、「事象の持つ値」×「その事象の確率」の総和すなわち

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$

が平均として最も自然な表現になります。

平均



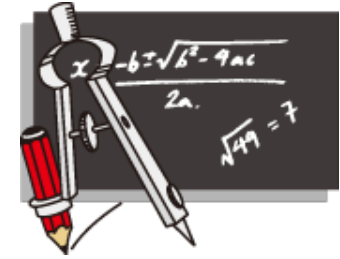
- この平均を連続な確率に拡張すると、微小区間の総和になりますから

$$\mu = E[X] = \int xf(x)dx$$

となります。

- ちなみに、「ある現象のもつ能力（例えば重さ、電荷など）」×「ある現象の大きさ（ベクトル、距離など）」の事をモーメントと呼びます。
- つまり平均はモーメントの一種といえることができます。

期待値

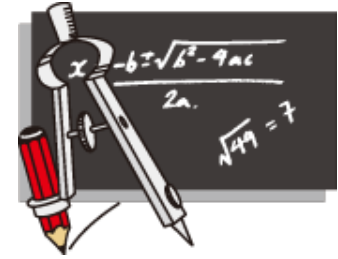


- ・ モーメントと考えるならば、「確率事象 X のもつ値」は必ずしも確率事象の値 x_i である必要はありません。
- ・ 例えば、でた目によって賞金の金額が変わるような場合を想像すれば簡単にわかります。
- ・ こう考えるとこの平均を少しだけ拡張することができます。

$$E[g(X)] = \int g(x)f(x)dx$$

- ・ これを期待値と呼びます。

期待値



- ちなみに期待値には線形性があります。

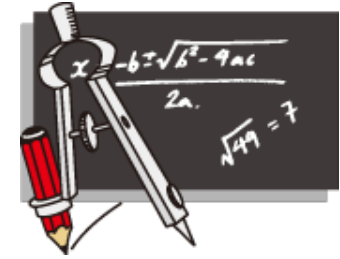
$$E[a \cdot g(X) + b \cdot h(X)]$$

$$= \int \{a \cdot g(x) + b \cdot h(x)\} dx$$

$$= a \int g(x) \cdot f(x) dx + b \int h(x) \cdot f(x) dx$$

$$= a \cdot E[g(X)] + b \cdot E[h(X)]$$

分散

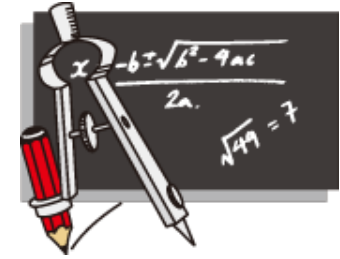


- さて、確率変数のばらつきを評価する事を考えます。
- そのためには、基準となる値（普通は平均）と各確率変数の差を統計量として取り出す必要があります。
- ただ、単なる差（偏差）を統計量として扱うと、基準となる値より大きい確率変数の効果が、小さい確率変数の効果により相殺されてしまいます。（平均を基準に実施すると定義から0）
- 偏差の絶対値を用いてもよいのですが、絶対値は数学的に取り扱いが面倒です。
- そこで、偏差の平方を取り扱います。

$$\sigma^2 = V[X] = E[(X - \mu)^2] = \int (x - \mu)^2 f(x) dx$$

- これを分散といいます。

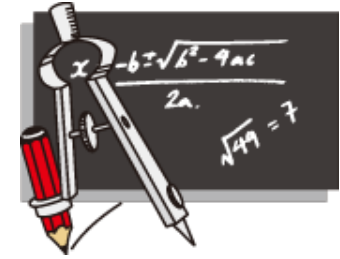
分散



- ・ 分散は単位のディメンジョンとして、確率変数の自乗となります。
- ・ そこで分散の平方根をとると、同じディメンジョンに戻す事ができます。
- ・ これを標準偏差といいます。
- ・ なお分散を求める便利な方法として、「自乗の平均から、平均の自乗を引く」という方法があります。以下のように導かれます。

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu \cdot E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - \mu^2\end{aligned}$$

線形変換と平均・分散



- 確率変数について以下のような線形変換を行ったとします。

$$Y = aX + b$$

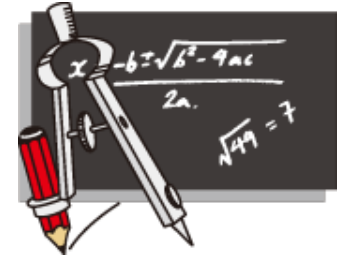
- 平均と分散はどのようなになるでしょうか。

$$\mu_Y = E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = a \cdot \mu + b$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= V[Y] = E[(Y - \mu_Y)^2] = E[\{(aX + b) - (a\mu + b)\}^2] \\ &= E[a^2 X^2 + 2abX + b^2 - 2\{aXa\mu + abX + ab\mu + b^2\} + \{a^2\mu^2 + 2ab\mu + b^2\}] \\ &= E[a^2 X^2 - aXa\mu + 2a^2\mu^2] = a^2 E[(X - \mu)^2] = a^2 \sigma^2\end{aligned}$$

- つまり、線形変換に対して
 - 平均は不変
 - 分散はスケーリングが必要

標準化



- そこで、以下のような変数変換を行うと

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

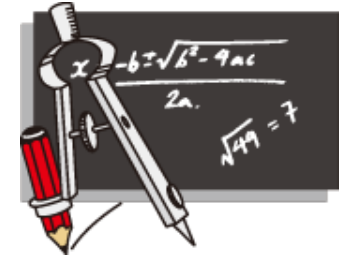
- 平均及び分散は次のようになる

$$E[Z] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}(E[X] - \mu) = 0$$

$$V[Z] = V\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2}(E[(X - \mu)^2]) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

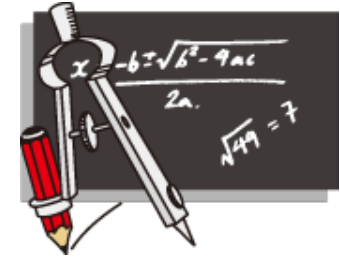
- これを標準化と呼びます

演習問題 3



- 確率変数 X が $a \leq X \leq b$ で一様分布であるとき
 - 確率密度関数 $f(x)$ を求めよ
 - 平均 $\mu = E[X]$ を求めよ
 - 分散 $\sigma^2 = V[X]$ を求めよ

まとめ



- 確率関数
- 確率密度関数
- 分布関数
- 期待値
- 平均
- 分散
- 確率変数の線形変換と標準化