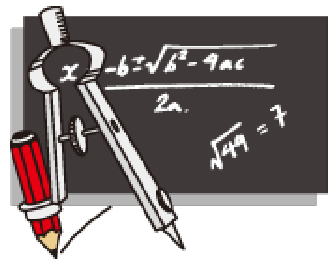
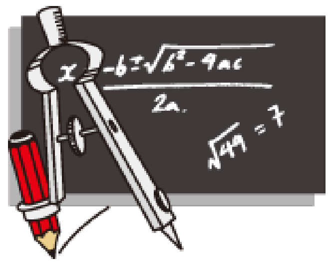


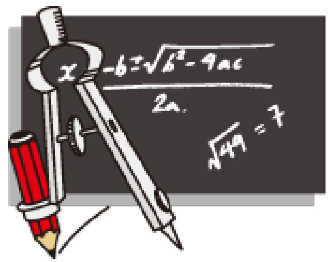
応用数学III
(13)準同型写像

木村真一

講義のスケジュール



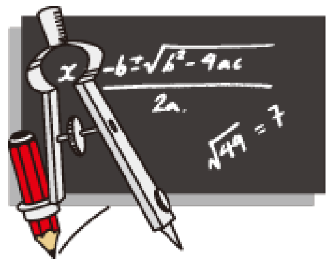
- (1)　確率の基礎
- (2)　確率変数と確率分布
- (3)　いろいろな確率分布
- (4)　多次元確率分布
- (5)　大数の法則と中心極限定理
- (6)　確率過程の基礎１
- (7)　確率過程の基礎２
- (8)　フーリエ解析
- (9)　フーリエ変換の性質
- (10)　相関解析
- (11)　不確定信号の相関解析
- (12)　群・環・体の定義
- (13)　準同型写像
- (14)　Nを法とする合同式



前回の復習

- 群の定義
  - 集合G上に、次の性質を満たす二項演算○がある
    - ○は結合法則を満たす。
    - 単位元eを持つ
    - 全ての元が逆元を持つ。
- 環の定義
  - 集合R上に、二つの二項演算、和”＋”と積”・”を定義し、次の性質を全て満たす
    - 加法に関してＲはアーベル群である。
    - 乗法は結合法則を満たす。
    - 乗法の単位元が存在し、加法の単位元と異なる。
    - 分配法則が成り立つ。
- 体の定義
  - Fが可換環であって、Fの0以外の元が、乗法に関する逆元をもつ

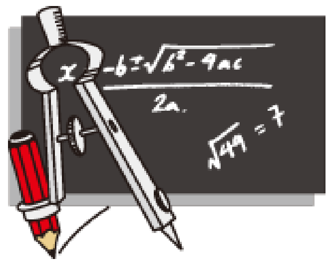
写像



- 数字と数字の間の関係を与えるもの：
  関数、より広くいうと写像
- ある集合から、別の集合への投射を行う

- ある集合が別の集合に投射されたとき、はたして、元の集合の持っていた集合の性質は保存されるのか？？
  - 集合の性質
    - 二項演算、交換法則、分配法則、単位元、逆元.....
    - 群、環、体

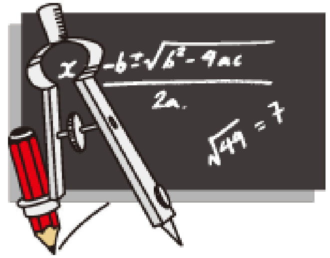
写像そのものの性質の整理



- 同じ性質を持つ写像は、同じ数学モデルとして扱えるはず
- 現象的には異なっても、抽象化すると同じ写像の性質を持っていれば、同じ写像として扱える
- 例)
  - 紙を裏返す
  - on-offが交互に切り替わるトグルスイッチ
  - マイナス1をかける
  - 鏡に映す

二回繰り返すと元に戻る操作 $\Rightarrow$ $a^2 = e$

群の準同型写像

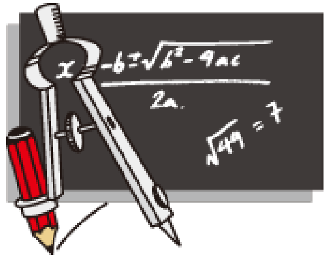


- 群の構造を保つ写像
- 群 G, G' に対して、写像 $f: G \to G'$ 次の性質を満たすとき、写像fを準同型写像という。

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b), \forall a, b \in G$$

- これは素直に納得できますね。
- 二項演算をして写像しても、写像した後に二項演算しても結果が同じ。
- これならば、元の群の構造を写像された群でも保っていると思えます

環の準同型写像



- 環の構造を保つ写像
- 環 R, R' に対して、写像 $f : R \to R'$ 次の性質を満たすとき、写像fを準同型写像という。

$$\forall a, b \in R$$

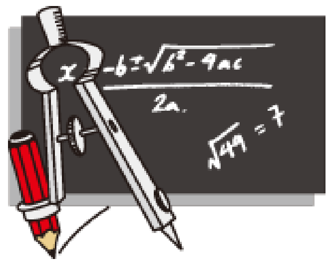
$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a) f(b)$$

$$f(1_R) = 1_{R'}$$

- 加法及び乗法の群構造が保たれている。
- 乗法の単位元は単位元に写像される。

準同型写像の集合



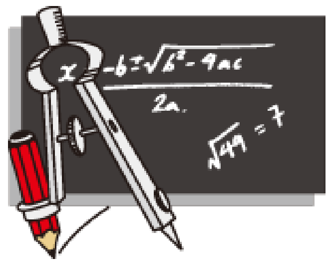
- A,Bをともに群または環としたときに、AからBへの準同型写像の集合を次のように記号で表します。

$$Hom(A,B)$$

- この後、この写像の集合の性質について考えます。

- ちなみに体の準同型写像は定義していませんが、体は環の特別な場合なので、環と思ったときの準同型写像の事とします。

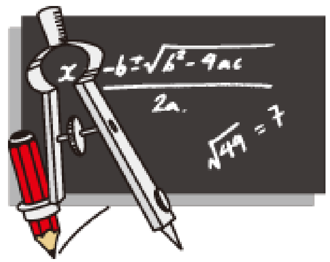
準同型写像の例１



- Gを複素数の0以外の元についての乗法に関する群
- G'を実数の0以外の元についての乗法に関する群

- $f(z)=|z|$　は準同型写像です。
- ほんと？

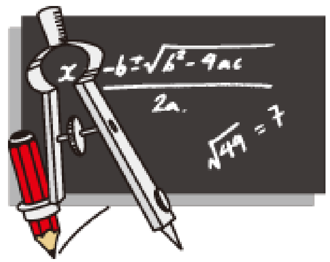
準同型写像の例２



- Gを実数の加法に関する群
- G’を複素数の乗法に関する群

- $f\left(x\right)=\exp\left(2\pi ix\right)$ は準同型写像です。

準同型写像の例３

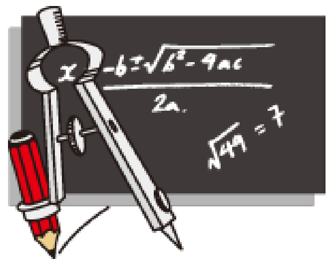


- Zを整数（環）
- Fを0と1二つの元だけからなる環　$F = \{0,1\}$
  - 先週やりましたね。
    - 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0
    - 00=01=10=0, 11=1

- この時以下の写像は準同型写像です。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n : even \\ 1 & n : odd \end{cases}$$

準同型写像の持つ性質



- 写像が $f:G \to G'$ 準同型写像であるとき、次のような性質があります

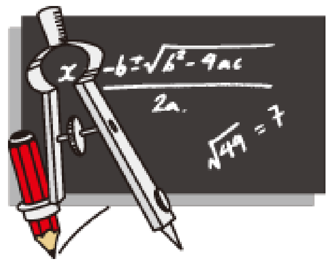
- Gの単位元をe、G’の単位元をe’とすると。

$$f(e) = e'$$

- Gの任意の元 a の逆元を a' とすると。

$$f\left(a^{-1}\right) = f(a)^{-1}$$

同型



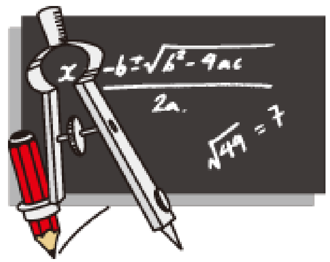
- 数学では「2つの群や環の構造が同じである」と言うことを「同型」と呼び次のように定義します。
- 群の準同型写像 $f:G \to G'$ が全単射のとき、fを群の同型写像といいます。
- 環の準同型写像 $f:R \to R'$ が全単射のとき、fを環の同型写像といいます。

- 2つの群の間に、同型写像が作れるとき、GとG'は同型であるといいます。

$$G \cong G'$$

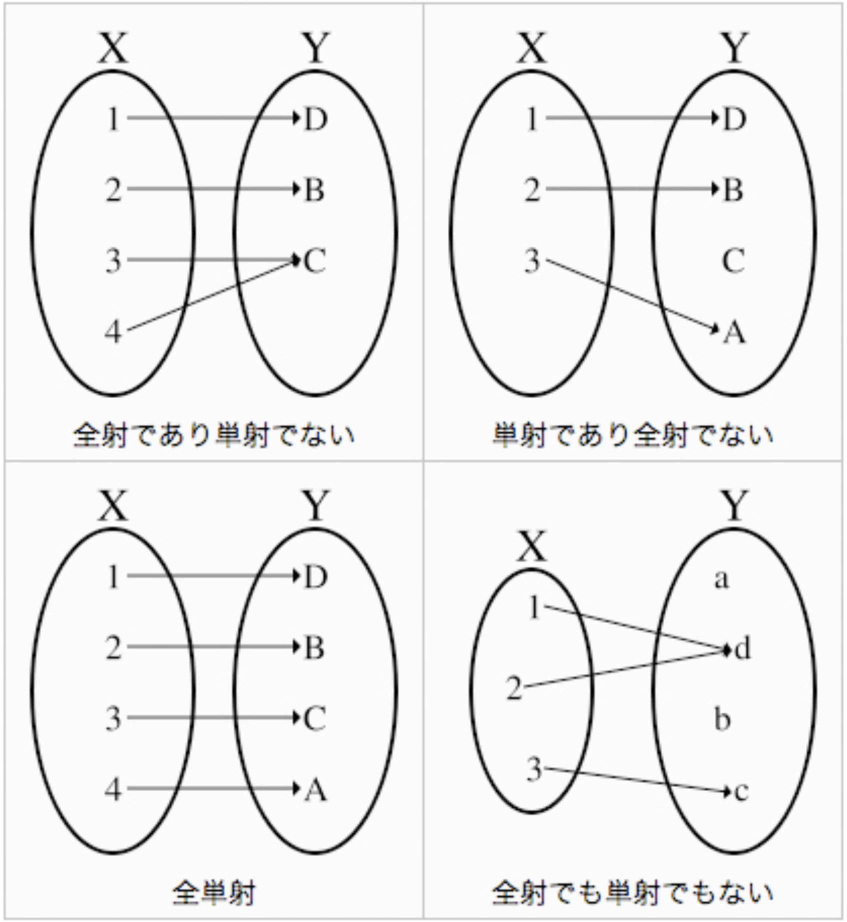
- 2つの環の間に、同型写像が作れるとき、RとR'は同型であるといいます。

$$R \cong R'$$

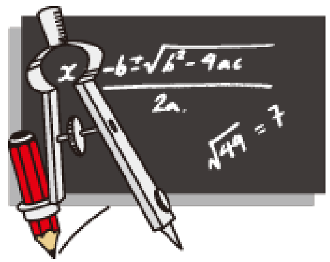


全単射って？

- 写像であって、その写像の終域となる集合の任意の元に対し、その元を写像の像とする元が、写像の定義域となる集合に常にただ一つだけ存在するようなもの。



同型の例



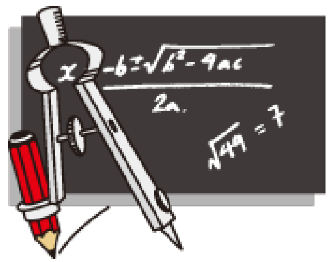
- G：正の実数の乗法に関する群
- G'：実数の加法群

$$f : G \to G' \qquad f(x) = e^x$$

- $f(x) = e^x$ は全単射で、逆写像は $g(x) = \log(x)$ で与えられます。

$\Rightarrow$ 同型です

同型ではない例

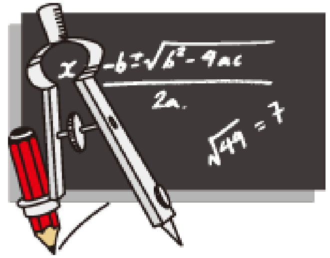


- G：正の有理数の乗法に関する群
- G'：有理数の加法群

$$f : G \to G' \qquad f(x) = e^x$$

$\Rightarrow$ **これは同型ではありません**

同型であるときの性質



- $f:G\to G'$ が群の同型写像のとき、逆写像も同型です。
- fは全単射であるので逆写像は必ず存在します。

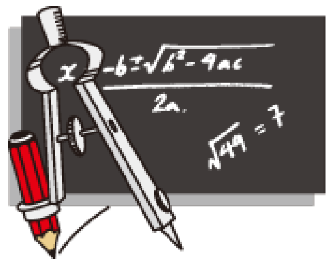
- Gの要素a、bについて、 $f(a)=x \quad f(b)=y$ とします。
- fは同型なので、 $f(a\circ b)=f(a)\circ f(b)$
- この両辺に f^{-} を作用させて、

$$f^{-}\left(f\left(a\circ b\right)\right)=a\circ b=f^{-}(x)\circ f^{-}(y)$$

$$=f^{-}\left(f(a)\circ f(b)\right)=f^{-}(x\circ y)$$

⇒ 逆写像も同型

核



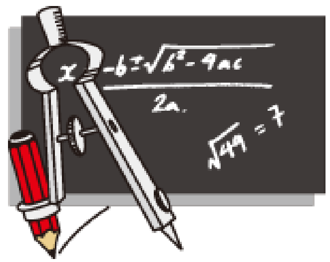
- 群の準同型写像　$f : G \to G'$　があったとき、次の集合を核と呼び、記号Kerで表します。

$$Ker\{f\} = \left\{ x \in G \middle| f(x) = e' \right\}$$

- ただしここでe’はG’の単位元です。
- 同様に環の準同型写像　$f : R \to R'$　に対して、次の集合を核と呼びます。

$$Ker\{f\} = \left\{ x \in R \middle| f(x) = 0 \right\}$$

核と単射



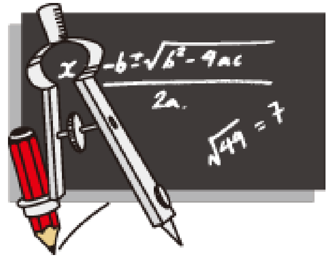
- 群の準同型写像　$f:G\to G'$　に対して、

　　fが単射である　$\Longleftrightarrow$　$Ker\{f\}=\{e\}$

- 環の準同型写像　$f:R\to R'$　に対して、

　　fが単射である　$\Longleftrightarrow$　$Ker\{f\}=\{0\}$

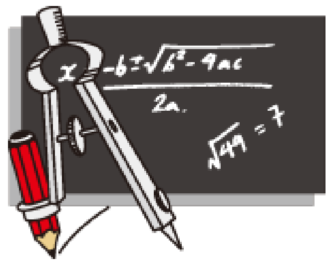
部分群



- 群Gの空でない部分集合Hが、Gと同じ演算で群になっているとき、HはGの部分群であるといいます。
  - Gの単位元をeとすると、Hの単位元は演算がGと同じなのですから、やはりeになります。
  - つまりHは必ずeを含む必要があります。

- 環Rの部分集合がR'が、Rの加法、乗法、単位元について環になっているとき、R'をRの部分環といいます。
- 体になっているときは、部分体といいます。

自明な部分群



- G自身、{e}は当然Gの部分群です。
- Gの元xをとり、次のような集合を考えると部分群になります。

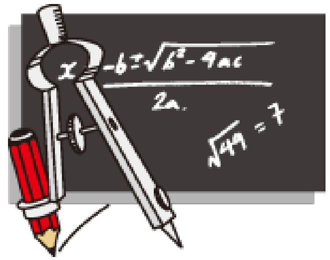
$$\langle x \rangle = \left\{ x^n \middle| n \in \mathbf{Z} \right\}$$

- これをxで生成される巡回部分群と言います。
- Gの部分集合Sに対して、次の集合はSを含む最小の部分群になります

$$\langle S \rangle = \left\{ a_1 \circ \cdots \circ a_n \middle| a_i \in S, or, a_i^{-1} \in S, 1 \le i \le n \right\}$$

- これをSの生成する部分群といいます。

位数



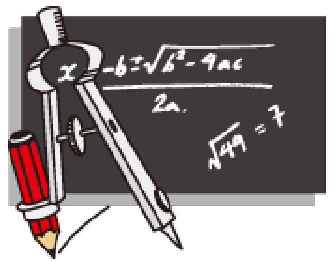
- 部分群の元の濃度（個数）のことを位数といいます。
- 巡回部分群 $\langle x \rangle$ の位数を特に $ord(x)$ と書きます。

- すると

$$ord(x) = \min\left\{ n \notin Z \middle| n > 0, x^n = e \right\}$$

つまり $x^n = e$ となる最小の正の整数です。

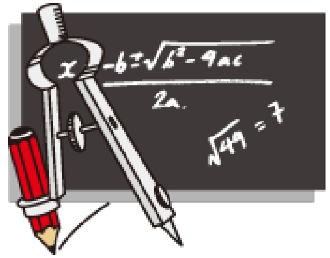
例題1



- G：有理数の加法に関する群
- G'：正の有理数の乗法に関する群

  として $f: G \to G'$ が準同型写像だとします。

- このとき、任意のxについて $f(x)=1$ であることを示してください。



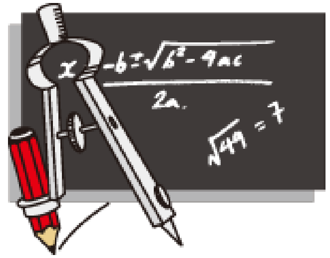
例題２

- G：有理数の加法に関する群
- G'：有理数の加法に関する群

として $f : G \to G'$ が準同型写像だとします。

- このとき、$f(1) = 1$ とすると、
- 任意のxについて $f(x) = x$ であることを示してください。

まとめ



- 準同型写像
- 同型
- 核
- 部分群
- 位数