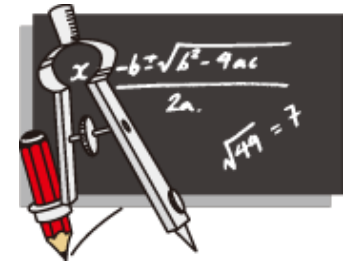


応用数学III

(11)不確定信号の相関解析

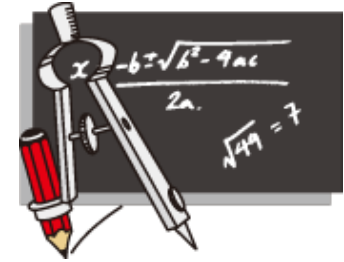
木村真一

講義のスケジュール



- | | |
|------------------|-----------------|
| (1) 確率の基礎 | (8) フーリエ解析 |
| (2) 確率変数と確率分布 | (9) フーリエ変換の性質 |
| (3) いろいろな確率分布 | (10) 相関解析 |
| (4) 多次元確率分布 | (11) 不確定信号の相関解析 |
| (5) 大数の法則と中心極限定理 | (12) 群・環・体の定義 |
| (6) 確率過程の基礎 1 | (13) 準同型写像 |
| (7) 確率過程の基礎 2 | (14) Nを法とする合同式 |

相関関数



- ・ 周期関数の相互相関関数

$$\phi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

- ・ 非周期関数の相互相関関数

$$\phi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

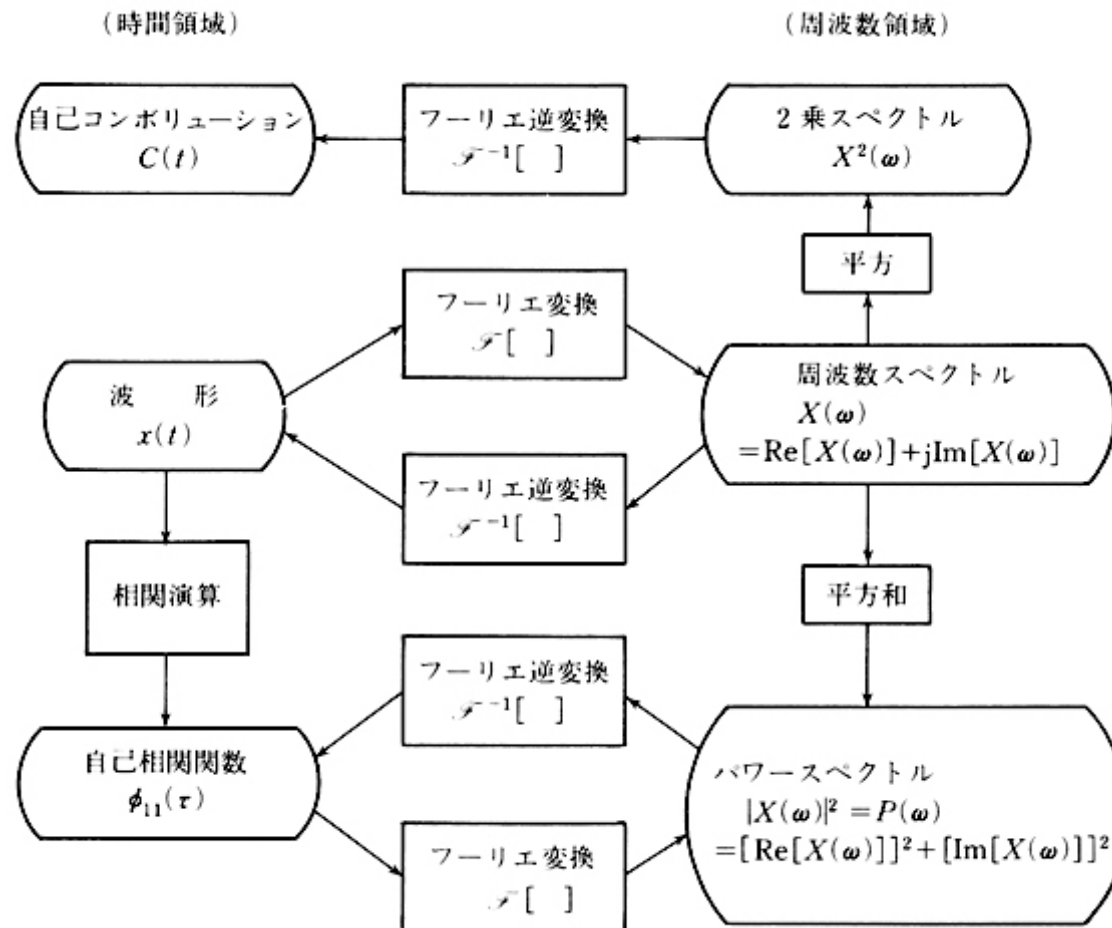
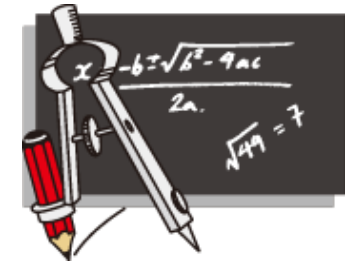
- ・ 周期関数の自己相関関数

$$\phi_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) \cdot x_1(t + \tau) dt$$

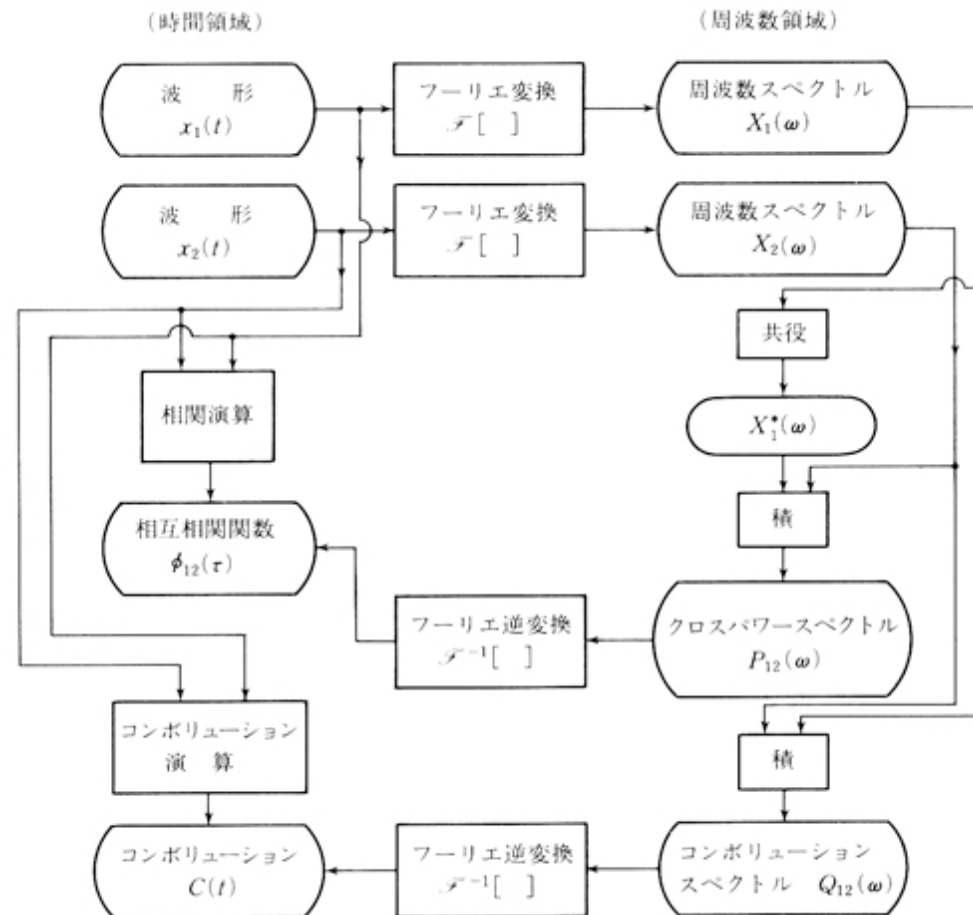
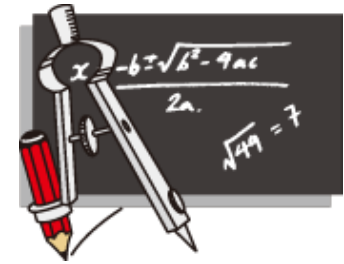
- ・ 非周期関数の自己相関関数

$$\phi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_1(t + \tau) dt \quad |X_1(\omega)|^2 = \Phi_{11}(\omega)$$

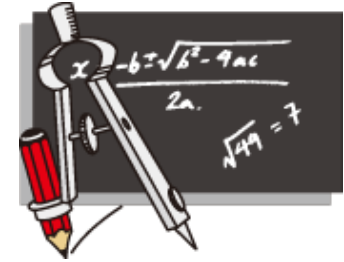
相互関係のまとめ (1 信号の場合)



相互関係のまとめ (2信号の場合)



不確定信号の自己相関関数

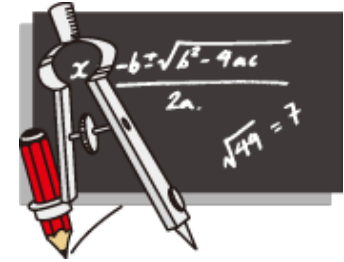


- ここまで議論してきた自己相関関数を不確定信号に拡張します。
- 本来不確定信号は時間関数の形で確定的に書くことはできませんが、ある時間サンプルを取り出し、次のように自己相関関数を定義します。

$$\phi_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_1(t) \cdot x_1(t + \tau) dt$$

- ここで不確定信号は無限の継続時間を持ち、定常的でどのサンプルも同じ結果を得られるとします。

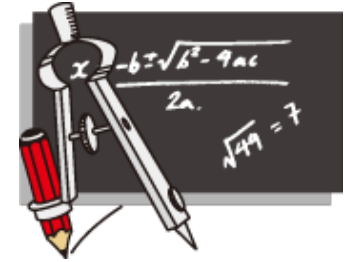
不確定信号とパワースペクトル



- ただ、先ほどの定義は不確定信号は統計的な性質は議論できても、時間関数として定義することができません。
- そのまま自己相関関数を議論することは難しい....。
- ただ、統計的な性質（確率分布）が議論できるということは、パワースペクトルならば取り扱うことができます。
- パワースペクトルから自己相関関数を導くには.....
そうです、ウィナーヒンチンです！！
- パワースペクトルが $\Phi_{11}(\omega)$ で与えられるとき自己相関関数はそのフーリエ逆変換で求められます。

$$\phi_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

例題：白色雑音の自己相関関数



- 理論上白色雑音は帯域によらず一定ですから、帯域あたりのパワーを σ^2 とすると、パワースペクトルは次のように与えられます。

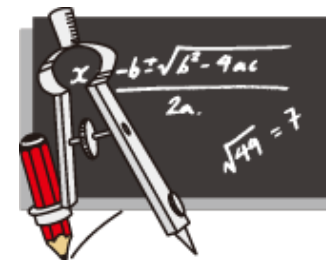
$$\Phi(\omega) = \sigma^2 \quad (-\infty < \omega < \infty)$$

(パワー無限大になってしまいますから、あくまで理想的な状態)

- このパワースペクトルからフーリエ逆変換によって自己相関関数を求めます。

$$\phi_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega$$

例題：白色雑音の自己相関関数（続）



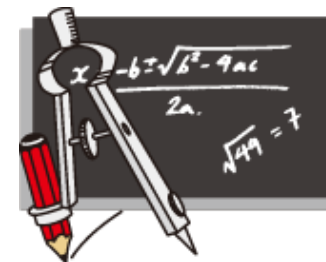
- 私たちはフーリエ変換の所で定数のフーリエ逆変換について学びました。

$$\delta \leftrightarrow 1$$

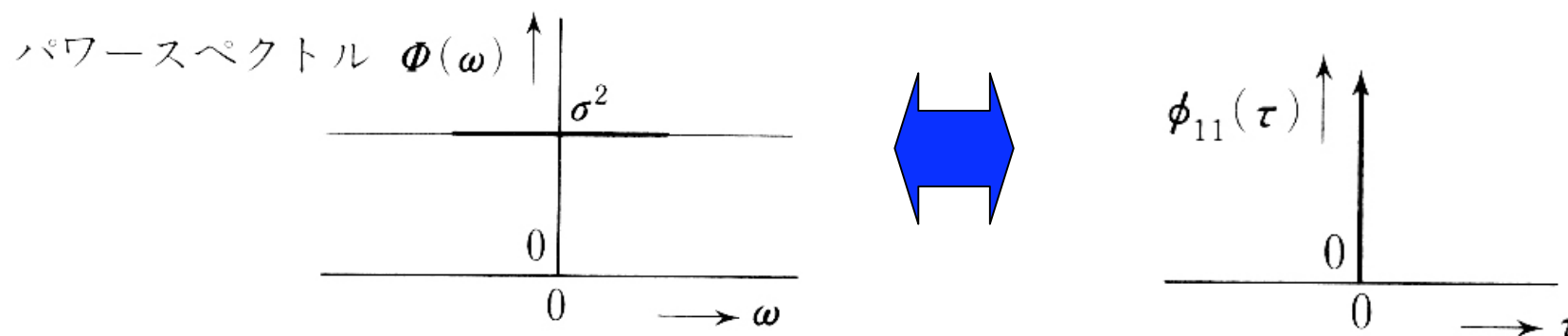
- このフーリエ変換対を利用すると白色雑音の自己相関関数がデルタ関数になることがわかります。

$$\phi_{11}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

例題：白色雑音の自己相関関数（続2）

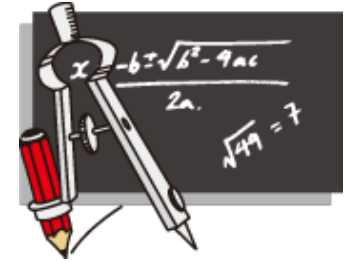


- この結果を図に表すと以下のようになります。



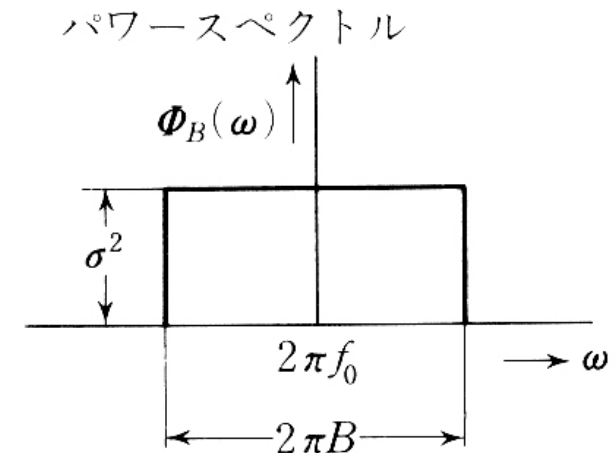
- この結果は納得できます。
 - 白色雑音は完全に時間に関して無相関なので、あらゆる相関時間に成分が存在しない。
 - $\tau=0$ だけが信号のパワーとして成分を持つ。

例題：帯域制限した白色雑音の 自己相関関数

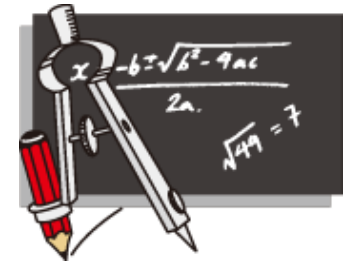


- 先に上げた白色雑音はあくまでも概念的なモデルでした。
- 実際には白色雑音と言えども有限時間であり、帯域も存在します。
- ここでは以下のように帯域が制限された白色雑音について考えてみましょう。

$$\Phi_B(\omega) = \begin{cases} \sigma^2 & \left(2\pi\left(f_0 - \frac{B}{2}\right) \leq \omega \leq 2\pi\left(f_0 + \frac{B}{2}\right) \right) \\ 0 & \left(2\pi\left(f_0 - \frac{B}{2}\right) > \omega, \omega > 2\pi\left(f_0 + \frac{B}{2}\right) \right) \end{cases}$$

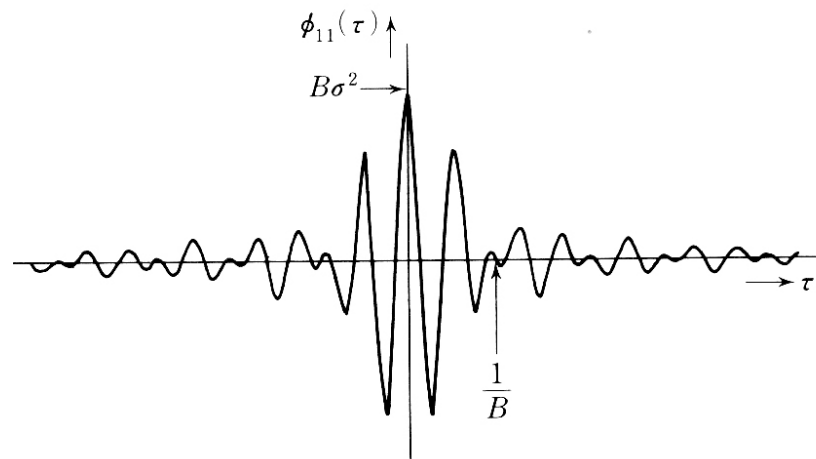


例題：帯域制限した白色雑音の 自己相関関数（続）

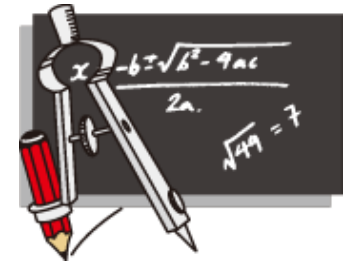


$$\phi_{11}(\tau) = B\sigma^2 \frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} \cos(2\pi f_0\tau)$$

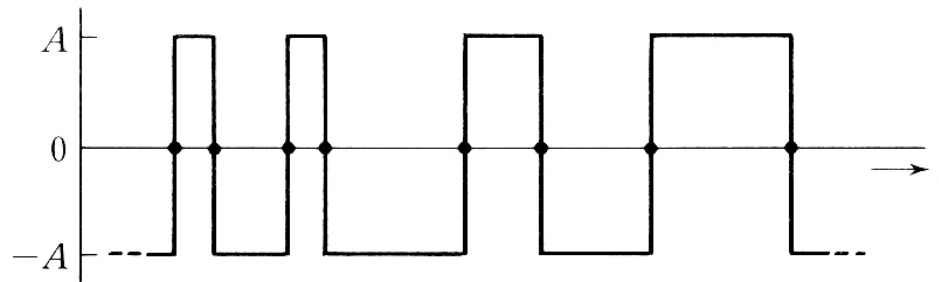
- この結果をグラフにしてみましょう。



例題：ポアソン分布に従う ランダムパルス時系列

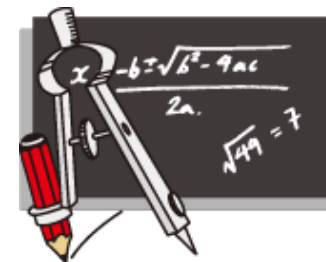


- 下図の様なランダムパルス時系列を考えます。



- パルス系列について次のような性質があるとします。
 - 振幅が $-A$ から A である。
 - $-A$ から A に立ち上がる時点、あるいは A から $-A$ に立ち下がる時点（零交叉点）がポアソン分布に従って確率的にきまる。
 - 振幅 $-A$ と振幅 A の出現確率は等しく、それぞれ 0.5 となる

例題：ポアソン分布に従う ランダムパルス時系列（続）



- この様なポアソン分布は次のように表すことができます。

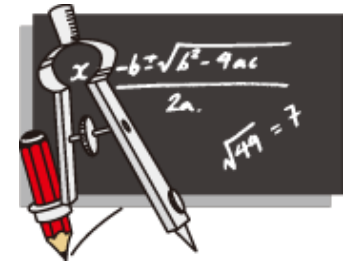
$$p(n) = \frac{(kT)^n}{n!} e^{-kT}$$

– ここで

- n は時間 T の間に生じる零交叉数
- k は1秒当たりの平均の交叉数
- このパルス系列の自己相関関数は次のようになります。

$$\phi_{11}(\tau) = A^2 e^{-k|\tau|}$$

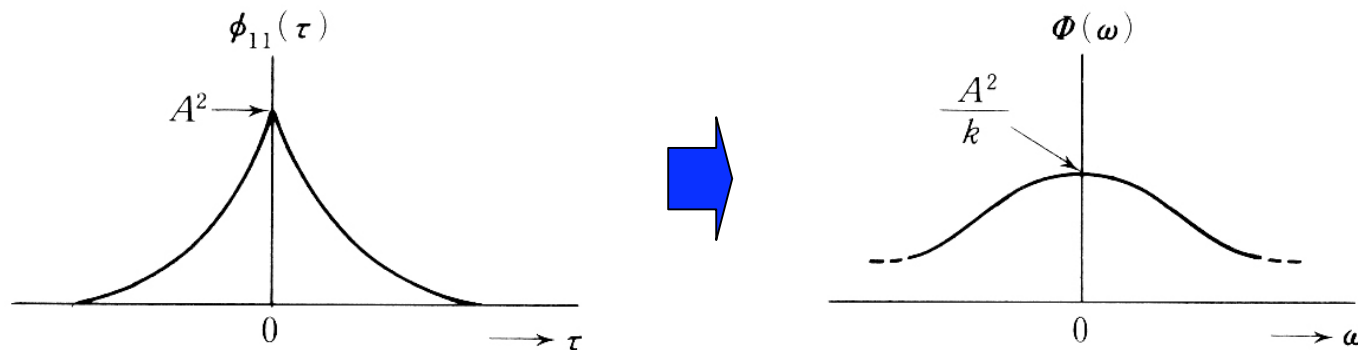
例題：ポアソン分布に従う ランダムパルス時系列（続2）



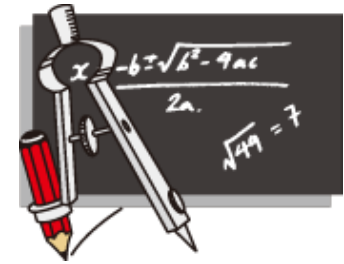
- このように自己相関関数が与えられたときに、パワースペクトルを求めるには、ウィナー・ヒンチンを用いて

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-k|\tau|} \cos(\omega\tau) d\tau \\ &= 4A^2 \frac{k}{(2k)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

- 結果をグラフに表すと次のようになります。



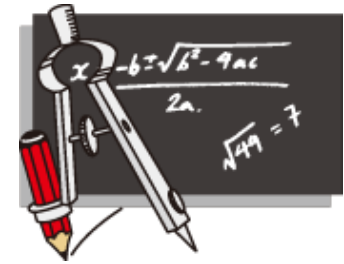
雑音と確定信号が共存する波形の 自己相関関数



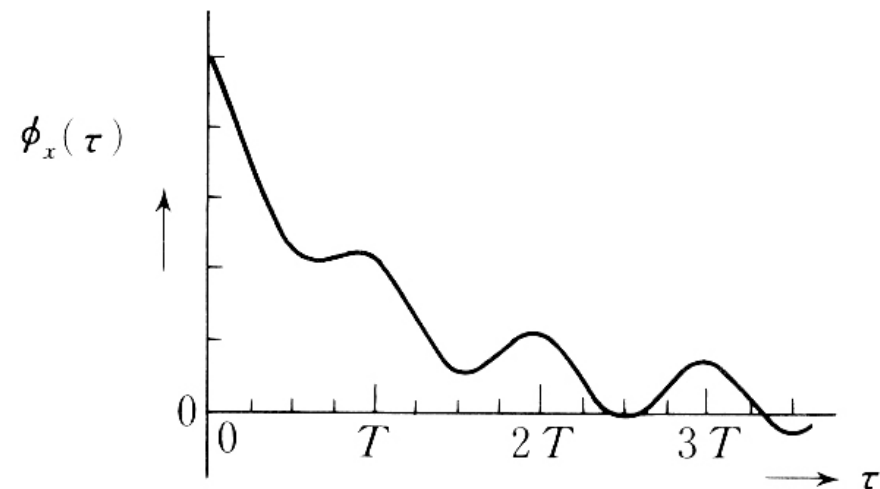
- 正弦波などの信号が雑音と共存する場合、元の信号の特徴をどうやって取り出せば良いでしょう。
- そんなときに自己相関処理はとても役に立ちます。
- ここで信号を $s(t)$ 、雑音を $n(t)$ とすると受信した信号はこれらの和ですから、 $x(t)=s(t)+n(t)$ です。
- $x(t)$ 、 $s(t)$ 、 $n(t)$ の自己相関関数を、それぞれ $\phi_x(t)$ 、 $\phi_s(t)$ 、 $\phi_n(t)$ とすると

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{(s(t) + n(t))(s(t + \tau) + n(t + \tau))\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^T s(t) \cdot s(t + \tau) dt + \int_{-T}^T s(t) \cdot n(t + \tau) dt + \int_{-T}^T n(t) \cdot s(t + \tau) dt + \int_{-T}^T n(t) \cdot n(t + \tau) dt \right\} \\ &= \phi_s(\tau) + \phi_n(\tau)\end{aligned}$$

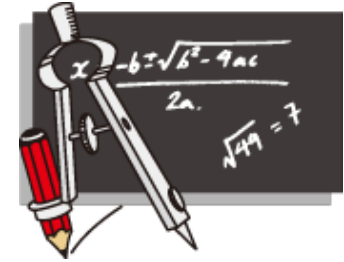
雑音と確定信号が共存する波形の 自己相関関数（続）



- ・ 先に調べたように白色雑音の自己相関関数は理想的にはデルタ関数です。
- ・ つまり、自己相関関数により雑音成分を取り除いて信号成分を取り出すことができます。
- ・ ただ実際には雑音も完全に無相関ではないので完全には分離できません。
- ・ 一例をお示しします。
 - ・ 信号：周期 T の正弦波
 - ・ 雑音：ポアソン分布
ランダムノイズ
 - ・ 信号対雑音比：1/10



自己共分散関数

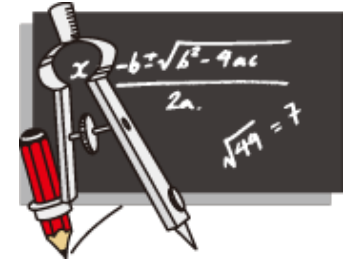


- 確率過程の時刻 t_1 及び t_2 の標本値をそれぞれ $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$ とします。
- 自己共分散関数は次のように与えられます。

$$C_x(t_1, t_2) = E\left[\left\{x(t_1) - E[x(t_1)]\right\}\left\{x(t_2) - E[x(t_2)]\right\}\right]$$

- ここで $E[\]$ は期待値（アンサンブル平均）のことです。
- 要は、同じ関数の、異なる時刻データの間の共分散と言うことになります。

自己共分散関数と自己相関関数



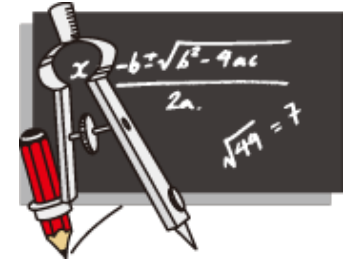
- ・ 自己相関関数はアンサンブル平均を用いて次のように書くことができます。（意味から明らかですね）

$$\phi_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$

- ・ このことから、自己共分散関数と自己相関関数の関係は次のように表すことができます。

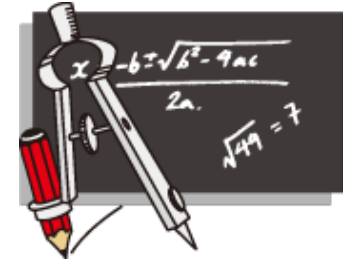
$$C_x(t_1, t_2) = \phi_x(t_1, t_2) - E[x(t_1)]E[x(t_2)]$$

例題



- 正弦波信号 $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$ は、位相 θ が $0 \sim 2\pi$ の間で一様分布するものとします。この $x(t)$ の自己相関関数を求めてください。ただし ω_0 は定数とします。

コラム：画像相関を用いた構造物の 高精度偏位計測 1



- 宇宙用高精度展開構造物の開発
 - MADE(Micron Accuracy Deployment Experiment)
 - 打ち上げ時の容積の制約
 - 高精度な構造物への要求
 - ・ アンテナ、集光鏡、望遠鏡

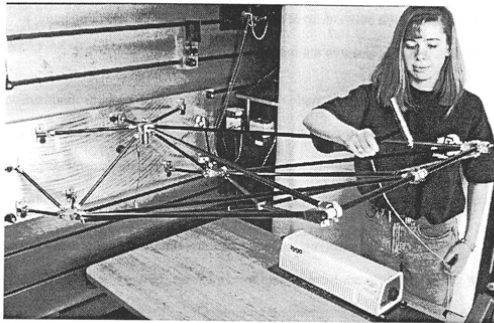


Figure 4.4: MADE Science Development Model in Testing Configuration

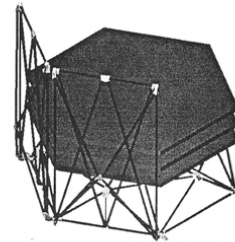


Figure 1.1: MADE Test Article in Stowed Configuration

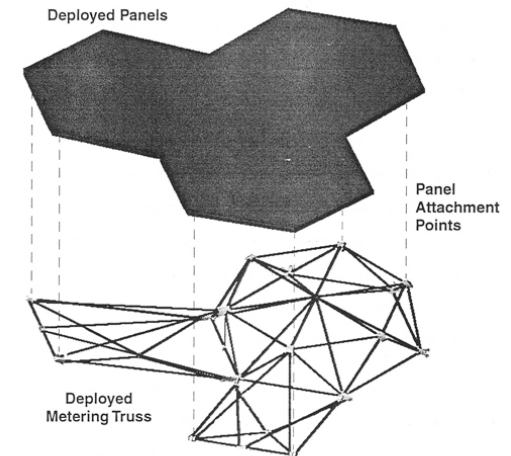
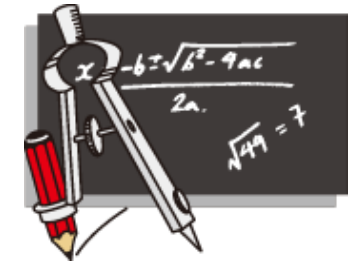


Figure 1.2: Exploded View of MADE Test Article in Deployed Configuration

コラム：画像相関を用いた構造物の 高精度偏位計測 2



- ・ 展開構造物の偏位計測
 - 展開精度の評価・調整
- ・ 画像相関を用いることで
対称面内方向の偏位を計測
 - サブピクセル外挿で
ピクセルの20分の一
程度の精度を実現

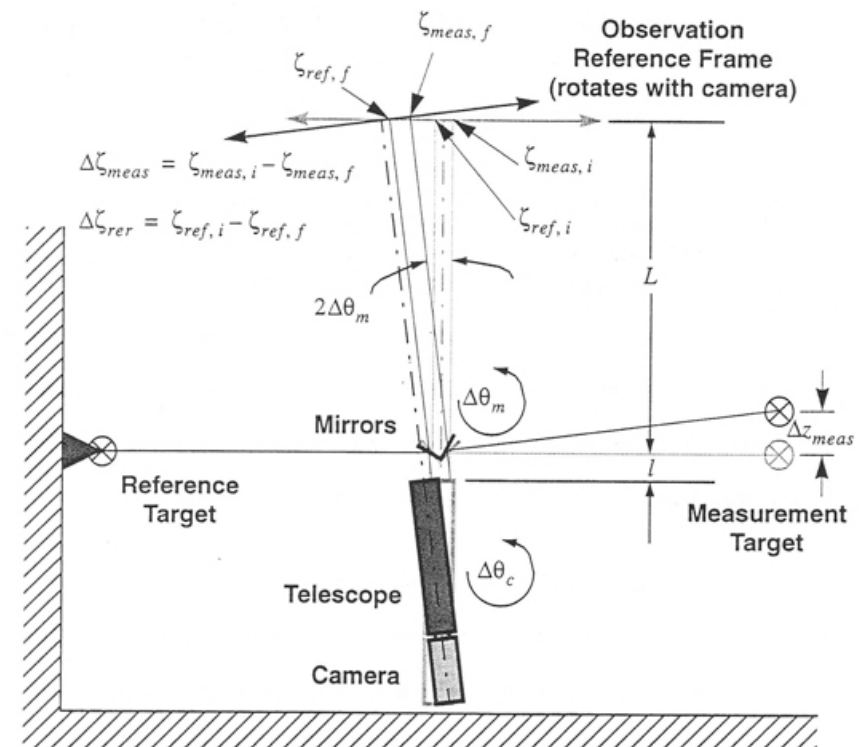


Figure 3.3: Ray Tracing with Rotational Sensitivities

コラム：画像相関を用いた構造物の 高精度偏位計測 3

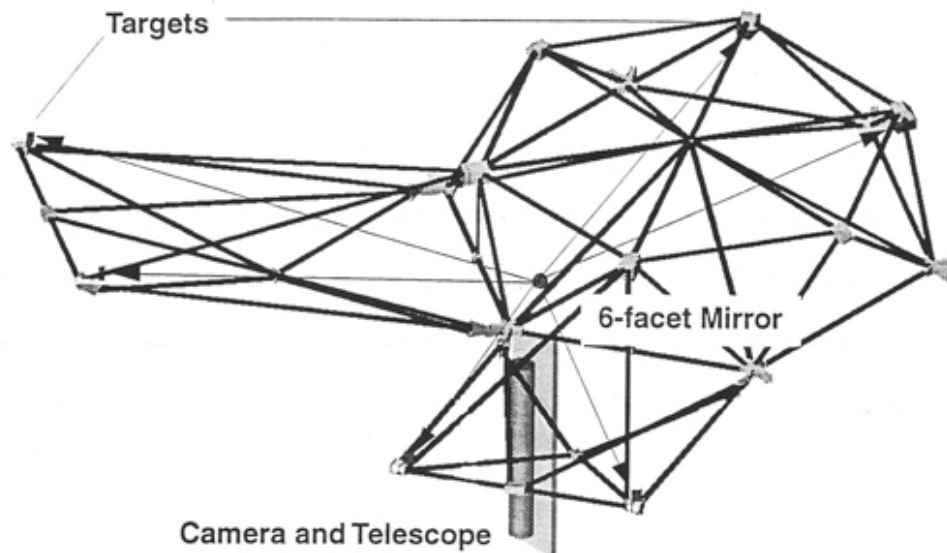
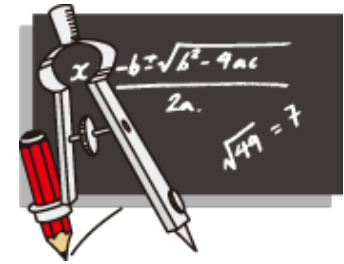


Figure 5.1: Flight System Conceptual Design

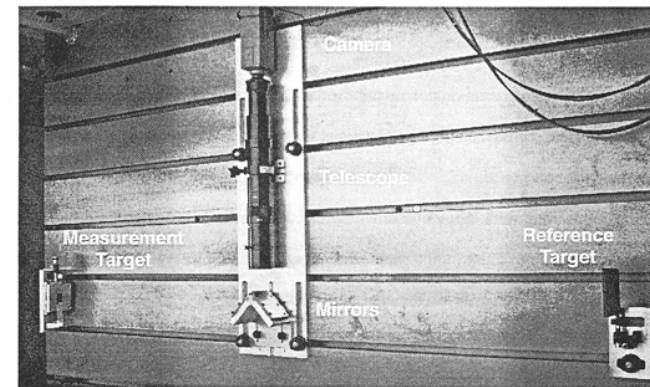


Figure 4.1: Prototype Hardware Mounted on Support Plate

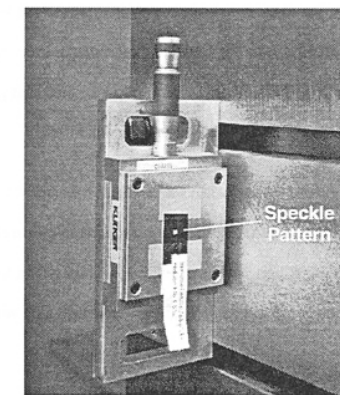
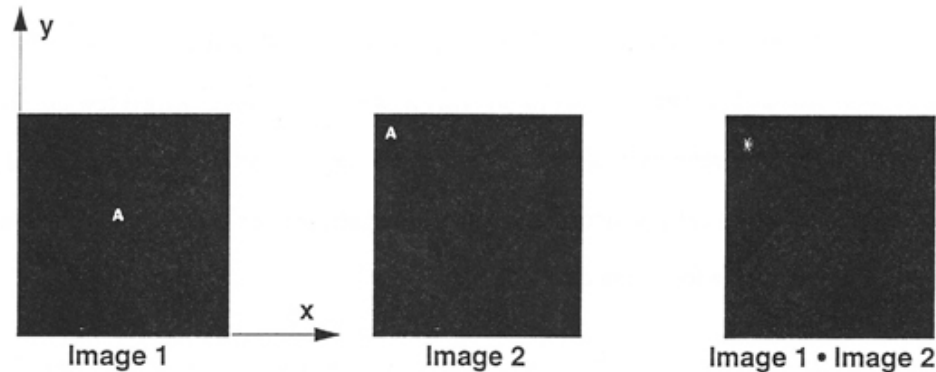
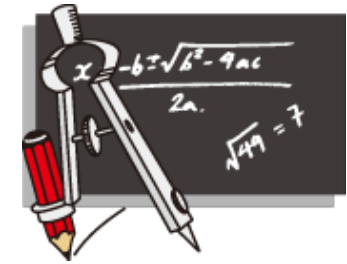


Figure 4.2: Measurement Target on Micrometer Translation Stage

コラム：画像相関を用いた構造物の 高精度偏位計測 4



$$C(x, y) = f_e(x, y) \cdot g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x+m, y+n)$$

$$f_e(x, y) \cdot g_e(x, y) \leftrightarrow F(u, v) G^*(u, v)$$

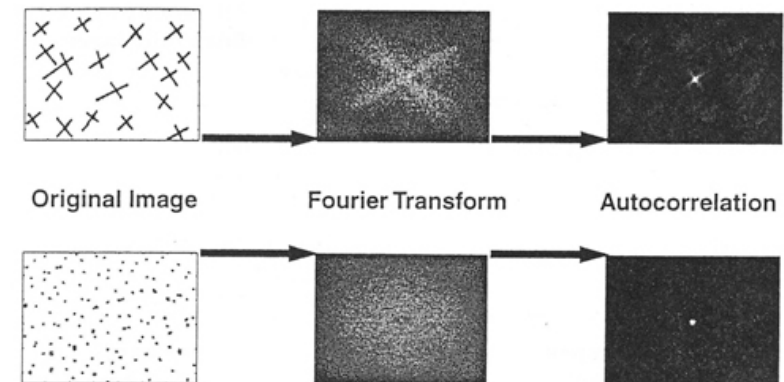
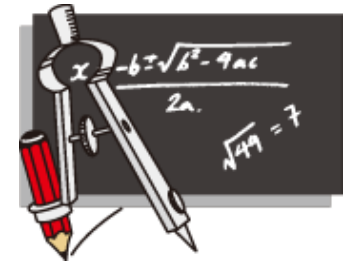


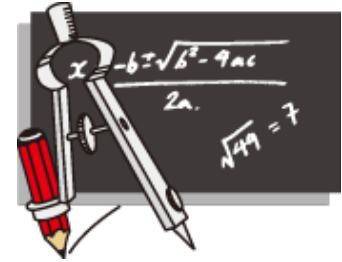
Figure 3.6: Complex Images Result in Axially Symmetric Correlation Peaks

コラム：画像相関を用いた構造物の 高精度偏位計測 5



```
% Calculate crosscorrelation field, C:  
  
% Compute Fourier transforms, I2, and I1, of img1, and img2.  
  
I1=fft2(img1);  
I2=fft2(img2);  
  
% Compute Fourier-Crosscorrelation identity, K  
  
K=I2.*conj(I1);  
  
% Compute the magnitude of the inverse Fourier transform of K to  
% obtain the crosscorrelation field, C.  
k=ifft2(K);  
C=abs(k);
```

まとめ



- ・ 不確定信号の自己相関関数
- ・ パワースペクトル
- ・ 自己共分散関数