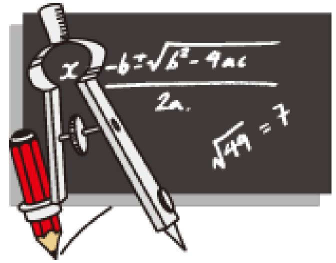
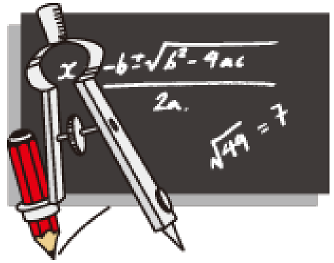


応用数学III
(10)相関解析

木村真一

講義のスケジュール



(1)　確率の基礎

(2)　確率変数と確率分布

(3)　いろいろな確率分布

(4)　多次元確率分布

(5)　大数の法則と中心極限定理

(6)　確率過程の基礎１

(7)　確率過程の基礎２

(8)　フーリエ解析

(9)　フーリエ変換の性質

(10)　相関解析

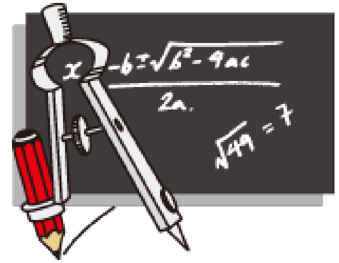
(11)　不確定信号の相関解析

(12)　群・環・体の定義

(13)　準同型写像

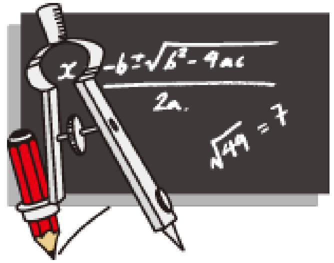
(14)　Nを法とする合同式

前回の復習：主要なフーリエ変換対のまとめ



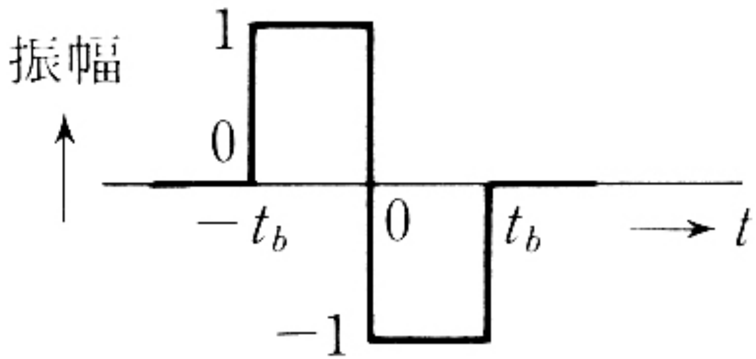
基本定理	波形 $x(t)$	$\longleftrightarrow$	周波数スペクトル $X(\omega)$
時間推移	$x(t-t_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$
周波数推移	$x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega-\omega_0)$
時間軸の伸縮	$x(at)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\cdot X\left(\dfrac{\omega}{\lvert a\rvert}\right)$
対称性	$X(t)$	$\longleftrightarrow$	$2\pi\cdot x(-\omega)$
時間微分	$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\longleftrightarrow$	$(j\omega)^n\cdot X(\omega)$
周波数微分	$(-jt)^n\cdot x(t)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$
時間積分	$\int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{j\omega}\cdot X(\omega)$
時間領域でのたたみ込み	$x_1(t)*x_2(t)$	$\longleftrightarrow$	$X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
周波数領域でのたたみ込み	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{2\pi}[X_1(\omega)*X_2(\omega)]$
共役	$x^*(t)$	$\longleftrightarrow$	$X^*(-\omega)$

例題：単一方形パルスの組み合わせ



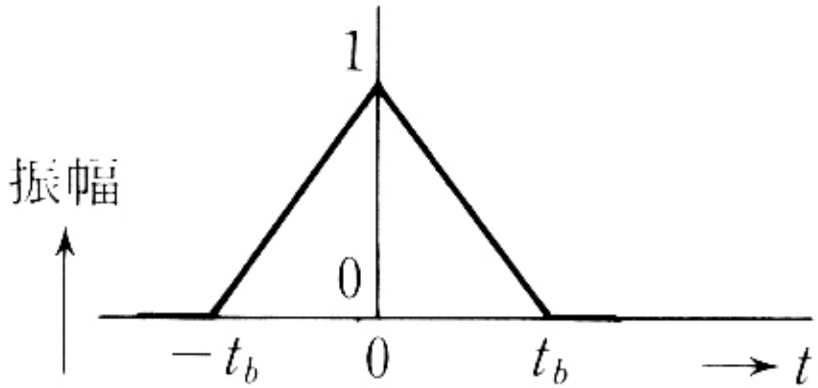
- 図のような波形の周波数スペクトルを求めてください。
- ヒント：この波形は先に求めた2つの単一方形パルスを、時間をずらして足し合わせたものです。

$$X_{bi-pulse}(\omega) = \frac{4i \cdot \sin^2\left(\dfrac{\omega t_b}{2}\right)}{\omega}$$

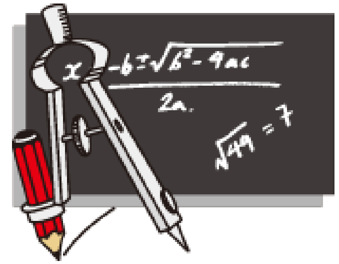


例題：三角パルス波

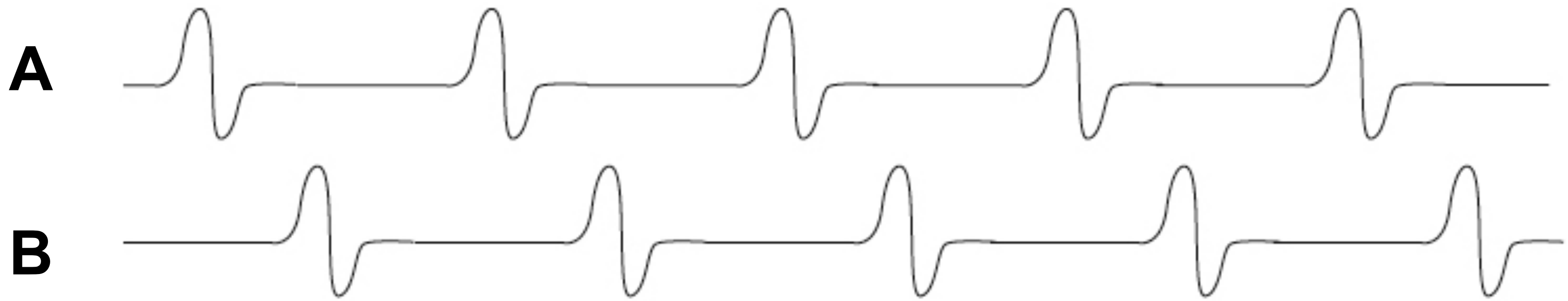
- 図のような三角パルス波の周波数スペクトルを求めてください。
- ヒント：この波形は前の問題の波形の積分になっています。



２つの信号の関係性（１）



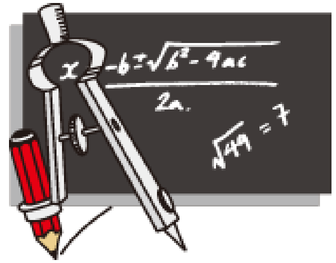
・ 2つの信号について、次のような波形が得られました。



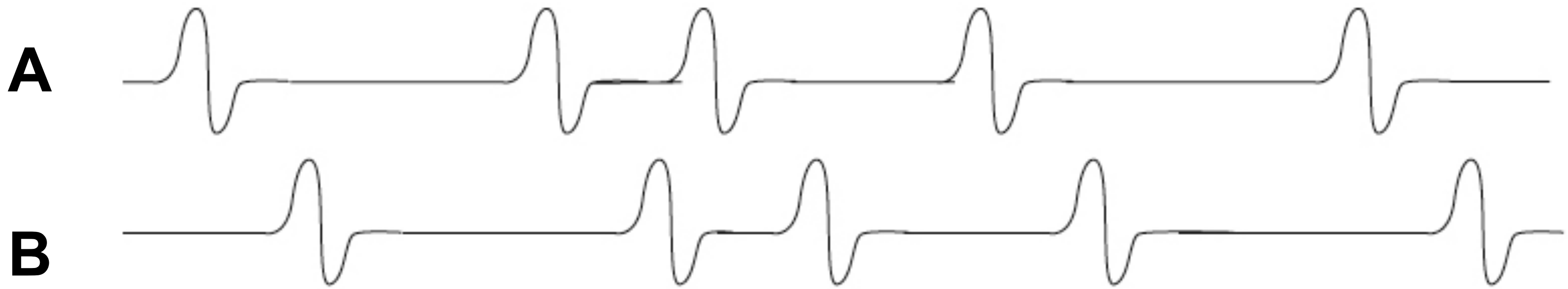
・ これらの関係を調べたい。
・ A、Bともに一定の周期がありそうです。
・ AとＢの間の位相も一定していそうです。

フーリエ解析

２つの信号の関係性（2）

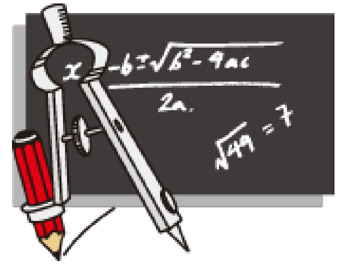


- それでは次のような波形ではどうでしょう。



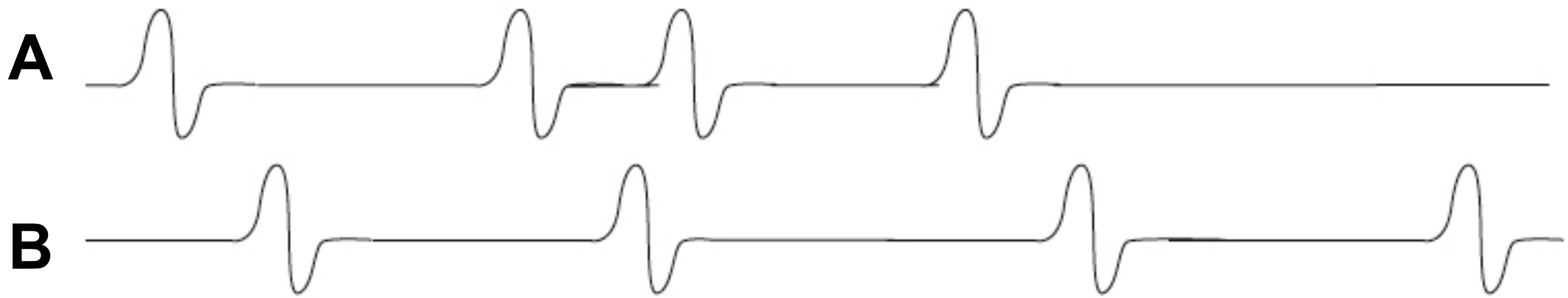
- 周期は一定していません。
- 信号Aの振動の後には、必ず信号Bが振動しています。
- 信号Aと信号Bの間には一定の関係がありそうです。

？？？？



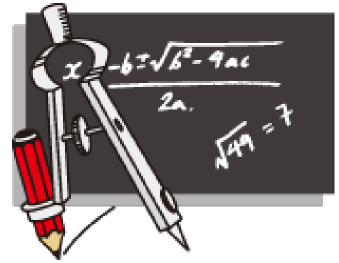
２つの信号の関係性（3）

- さらに、この場合はどうでしょう。



- 周期もありませんし、信号Aと信号Bの関係も常に必ずおきるわけではありません。
- でも、確率的には一定の関係がありそうに見えます。
- まさに確率過程ですね。

周期関数の相互相関関数

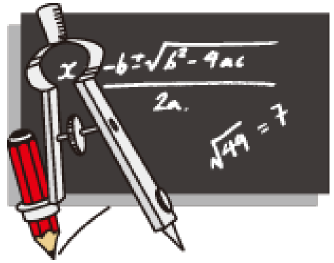


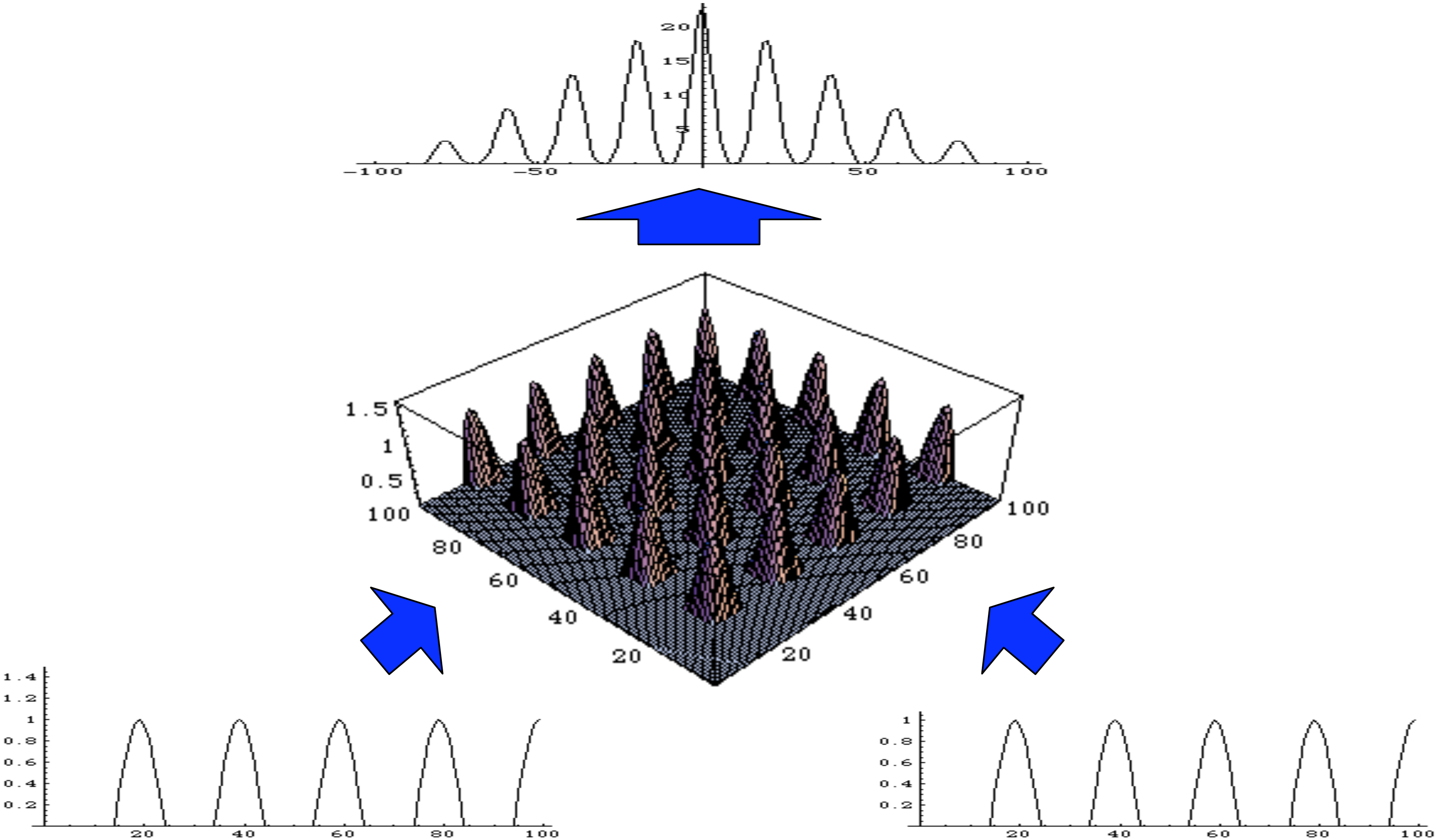
- まず最初は簡単な周期関数から始めます。
- 周期Tの二つの実周期関数の相互相関関数を次のように定義します。

$$\phi_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)\, x_2(t+\tau)\, dt$$

- これは例えば、レーダーやソナーなどの例をイメージすると分かりやすいです。
- x1が送り出した波で、その送り出した波が、対象に反射して戻ってきた波がx2です。

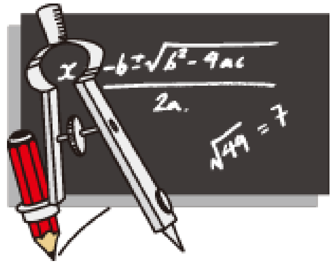
相互相関関数の意味

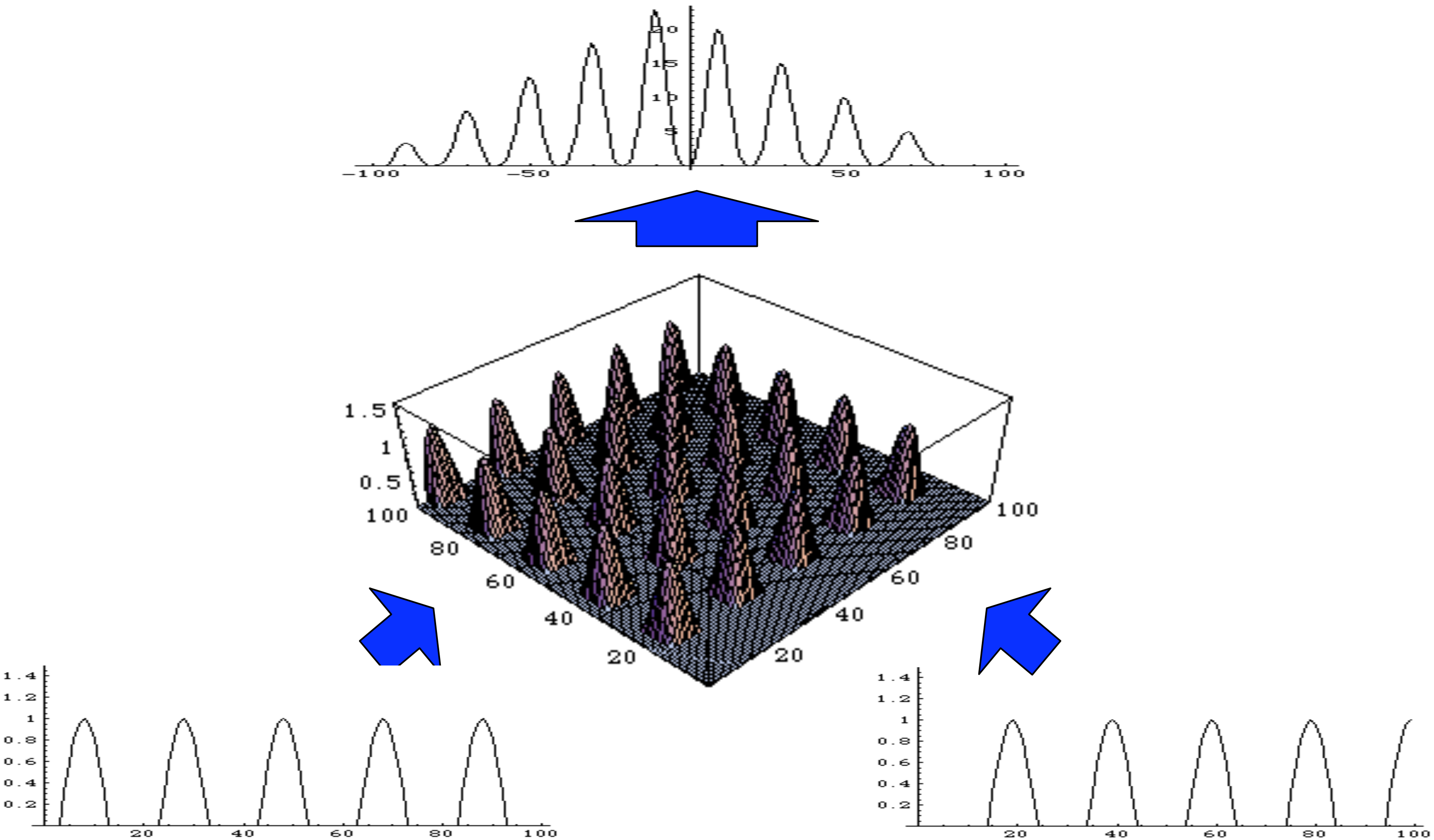




20
15
10
5
-100
-50
50
100
1.5
1
0.5
100
80
60
40
20
100
80
60
40
20
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100
1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100

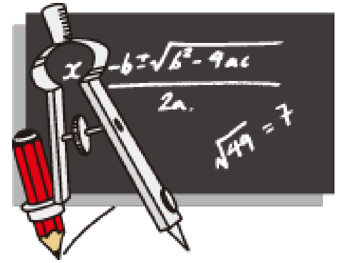
相互相関関数の意味

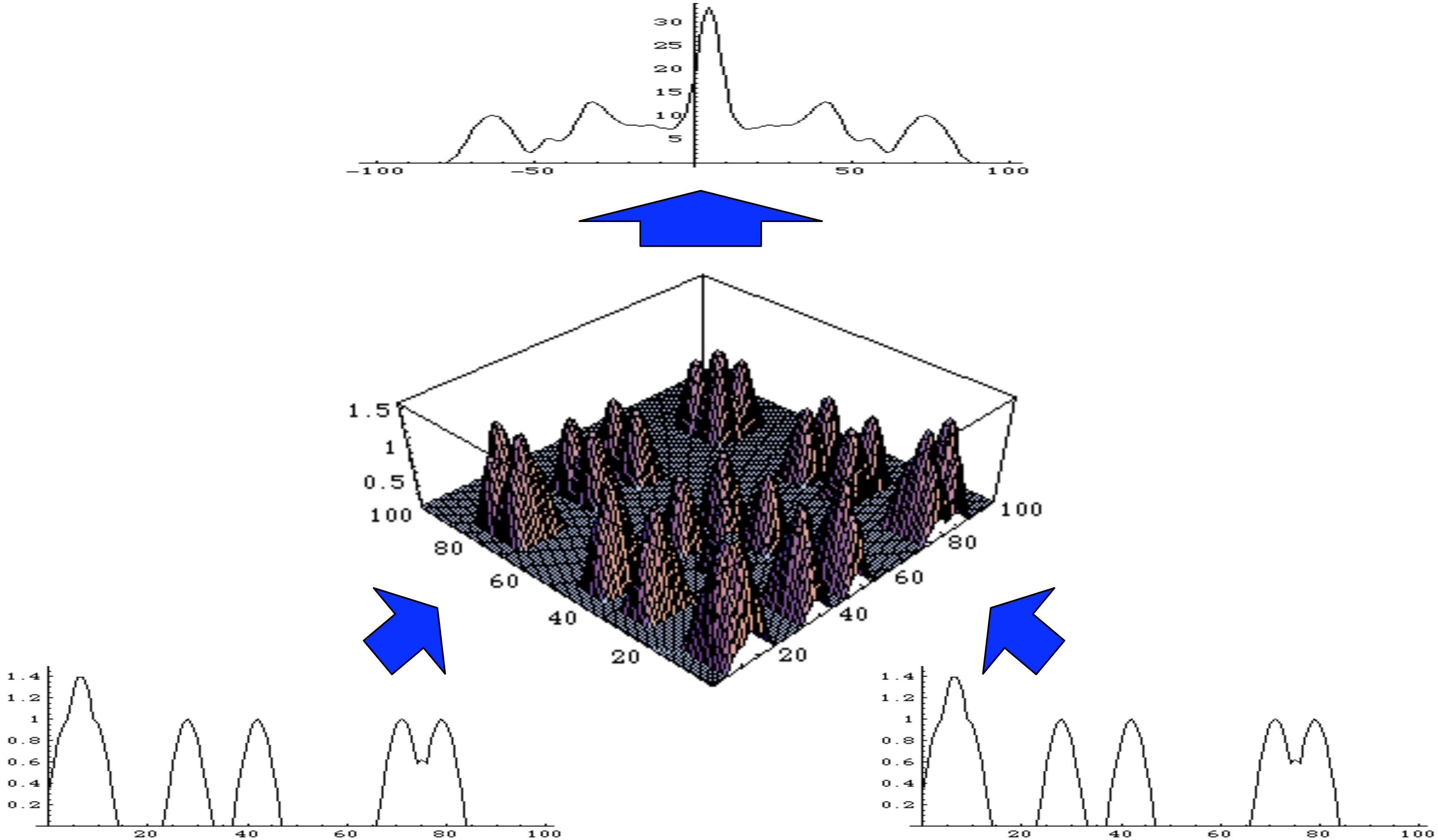




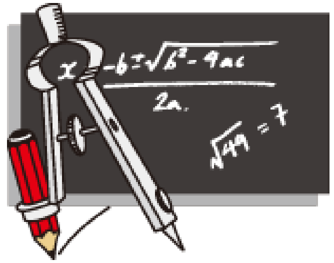
−100 −50 50 100
1.5
1
0.5
100 80 60 40 20
100 80 60 40 20
1.4 1.2 1 0.8 0.6 0.4 0.2
20 40 60 80 100
1.4 1.2 1 0.8 0.6 0.4 0.2
20 40 60 80 100

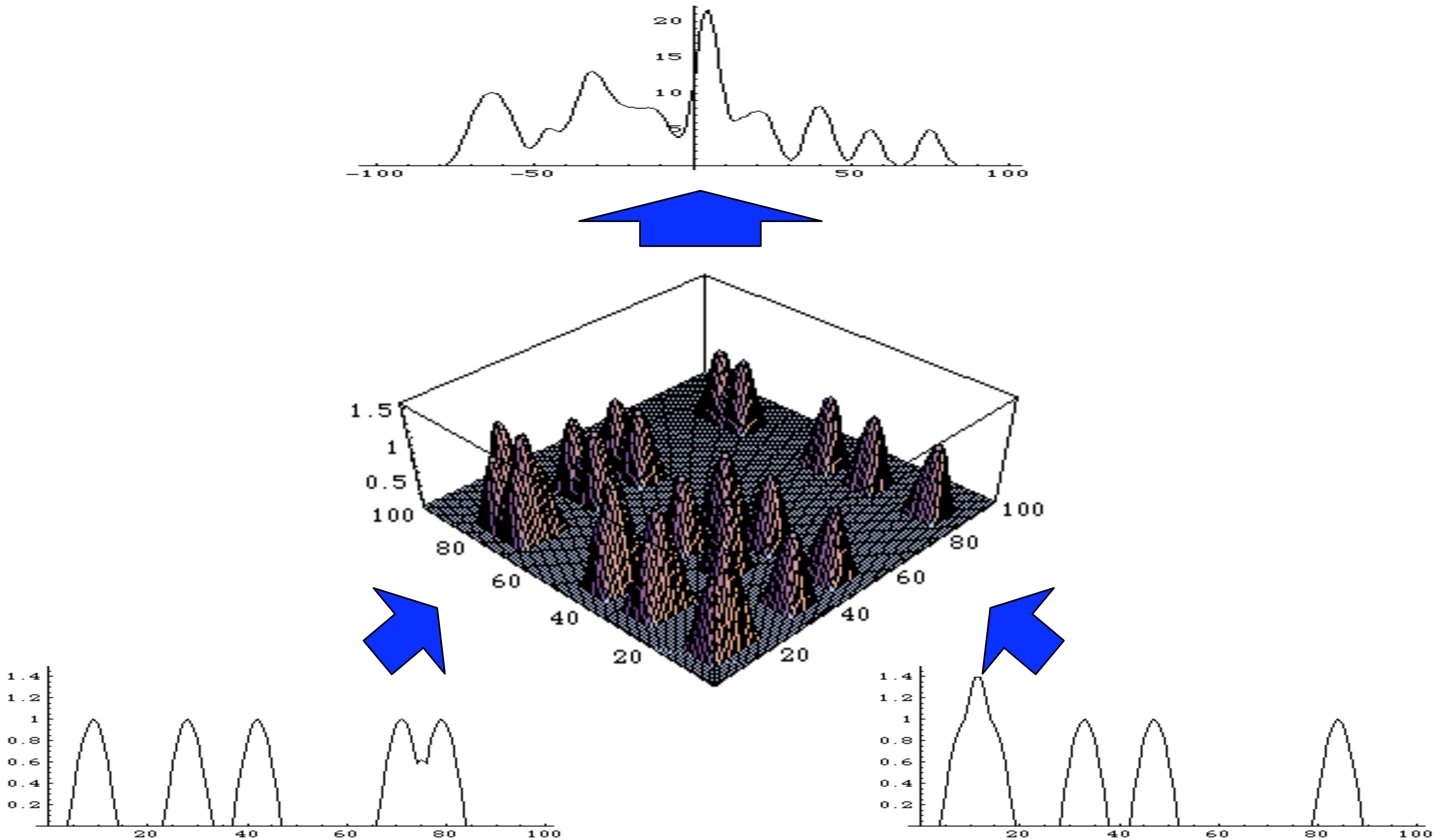
相互相関関数の意味



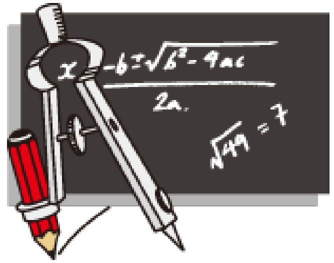

30
25
20
15
10
5
−100
−50
50
100
1.5
1
0.5
100
80
60
40
20
100
80
60
40
20
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100

相互相関関数の意味





フーリエ級数と相互相関関数１



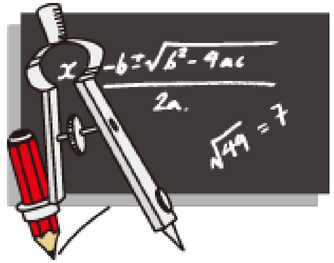
- さて次に、相互相関関数とスペクトルとの関係を考えてみましょう。
- 今二つの波x1・x2は周期Tの周期関数でしたから、複素フーリエ係数c1・c2を用いて次のように書けます。

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_1(n) e^{i\omega_n t}$$

$$x_2(t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_2(n) e^{i\omega_n (t+\tau)} \qquad = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_2(n) e^{i\omega_n t} e^{i\omega_n \tau}$$

- 但し、$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{Tn} & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$ です。

フーリエ級数と相互相関関数２



- **相互相関関数の定義から**

$$\phi_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_1(t)x(t-\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_1(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_2(n)e^{i\omega_n(t+\tau)}dt$$

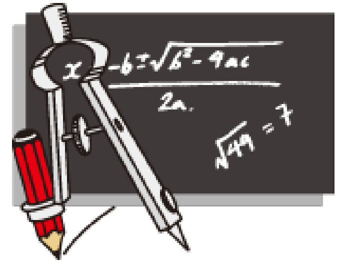
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\omega_n t}c_2(n)e^{i\omega_n\tau}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T}x_1(t)e^{i\omega_n t}dt$$

- **ここで** $c_1(n)=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T}x_1(t)e^{-i\omega_n t}dt$ ⇒ $c_1^*(n)=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T}x_1(t)e^{i\omega_n t}dt$

$$\phi_{12}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{c_1^*(n)\cdot c_2(n)\right\}e^{i\omega\tau}$$

おっと、これは
フーリエ逆変換

クロスパワースペクトル１



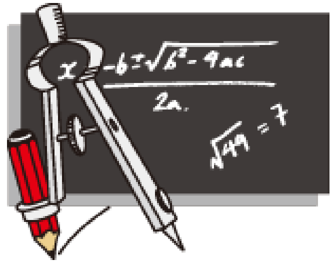
- ここで　$c_1^{*}(n)\cdot c_2(n)=\Phi_{12}(n)$　とおくと

$$\phi_{12}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_{12}(n)e^{i\omega\tau} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_{12}(n)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\phi_{12}(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$$

- つまり、　$\phi_{12}(\tau)\leftrightarrow\Phi_{12}(n)=c_1^{*}(n)\cdot c_2(n)$　というフーリエ変換対が成り立つということです。
- この　$\Phi_{12}(n)$　をクロスパワースペクトルと言います。
- また、　$\phi_{21}(\tau)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}x_2(t)x_1(t+\tau)dt$　から

$\Phi_{21}(n)=c_2^{*}(n)\cdot c_1(n)$　ということになります。

クロスパワースペクトル２



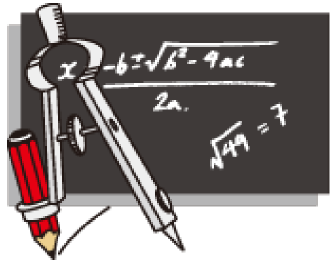
- ちなみに、意味からいって、

  $\phi_{12}(\tau)=\phi_{21}(-\tau)$ は明らかです。
- ただ $\phi_{12}(\tau)$ と $\phi_{12}(-\tau)$ は一般には等しくありません
- ですから相互相関関数は一般には偶関数ではありません。

- また、 $\Phi_{12}(n)=\Phi_{21}{}^{*}(n)$ はつねに成り立ちます。

$$\Phi_{21}{}^{*}(n)=\left(c_2{}^{*}(n)\cdot c_1(n)\right)^{*}=c_2(n)\cdot c_1{}^{*}(n)=\Phi_{12}(n)$$

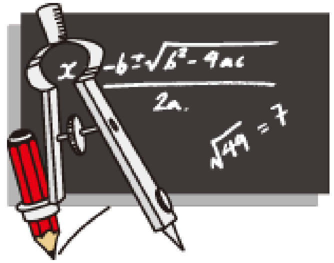
非周期関数の相互相関関数



- さて、相互相関関数を非周期関数に拡張します。
  - 元来、相互相関関数の計算には周期性を前提にする必要は必ずしもないはず。
- フーリエ級数の時と同様に
  - 周期が∞であると考える
  - 周期による正規化を省略する

$$\phi_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

非周期関数の相互相関関数



- x1(t)及びx2(t)のフーリエ変換を、それぞれX1(ω)、X2(ω)とし、相互相関関数φ12(τ)のフーリエ変換をΦ12(ω)すると次の関係が成り立つ。

$$\Phi_{12}(\omega) = X_1^{\ast}(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

- ゆえに

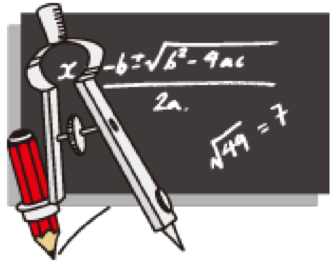
$$\phi_{12}(\tau) \leftrightarrow X_1^{\ast}(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

- また意味から考えて以下の関係があります。

$$\phi_{12}(-\tau) = \phi_{21}(\tau)$$

$$\Phi_{12}(\omega) = \Phi_{21}^{\ast}(\omega)$$

２つの複素関数の相互相関関数



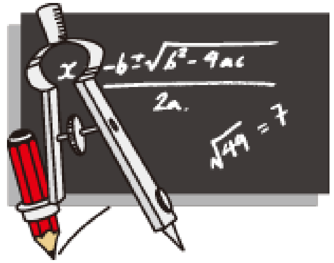
- さらに相互相関関数を複素関数まで拡張します。
- 複素関数を取り扱う場合次のように定義します。

$$\phi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)\, x_2^{*}(t)\, dt$$

- すると、これまで示してきた性質がそのまま使えます。

$$\Phi_{12}(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2^{*}(\omega)$$

周期関数の自己相関関数

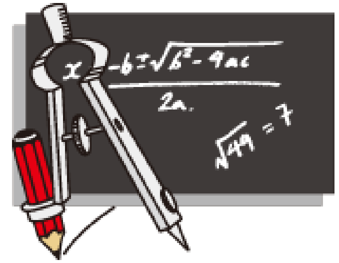


- 相互相関関数の2つの関数を同じ関数に置き換えたもの、すなわち自分自身に対する相関関数の事を、自己相関関数といいます。
- $x_1(t)$が実関数で、$-T_1/2$〜$T_1/2$の区間で定義される周期関数であるとき、次のように定義されます。

$$\phi_{11}(\tau)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)\cdot x_1(t+\tau)dt$$

- ここで意味から当然 $\phi_{11}(\tau)=\phi_{11}(-\tau)$ なので自己相関関数は必ず偶関数となります。

自己相関関数とフーリエ変換



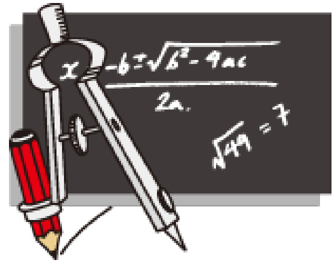
- 自己相関関数のフーリエ変換を求めると、自己相関関数が偶関数であることから

$$\Phi_{11}(n)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\phi_{11}(\tau)\cdot e^{-inn_1\tau}d\tau=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\phi_{11}(\tau)\cdot\cos(n\omega_1\tau)d\tau \quad \left(\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}\right)$$

$$\phi_{11}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_{11}(n)\cdot e^{inn_1\tau}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_{11}(n)\cdot\cos(n\omega_1\tau)$$

- $\Phi_{11}(n)$の事を信号$x_1(t)$のパワースペクトルと呼びます。
- ちなみに$\Phi_{11}(n)$はn=0の時最大で、平均電力を表します。

例題：正弦波の自己相関関数



- 正弦波： $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \theta)$ の自己相関関数及びパワースペクトルを求めてください。

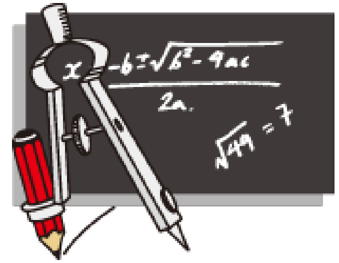
- 自己相関関数：

$$\phi_{11}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_1 \tau)$$

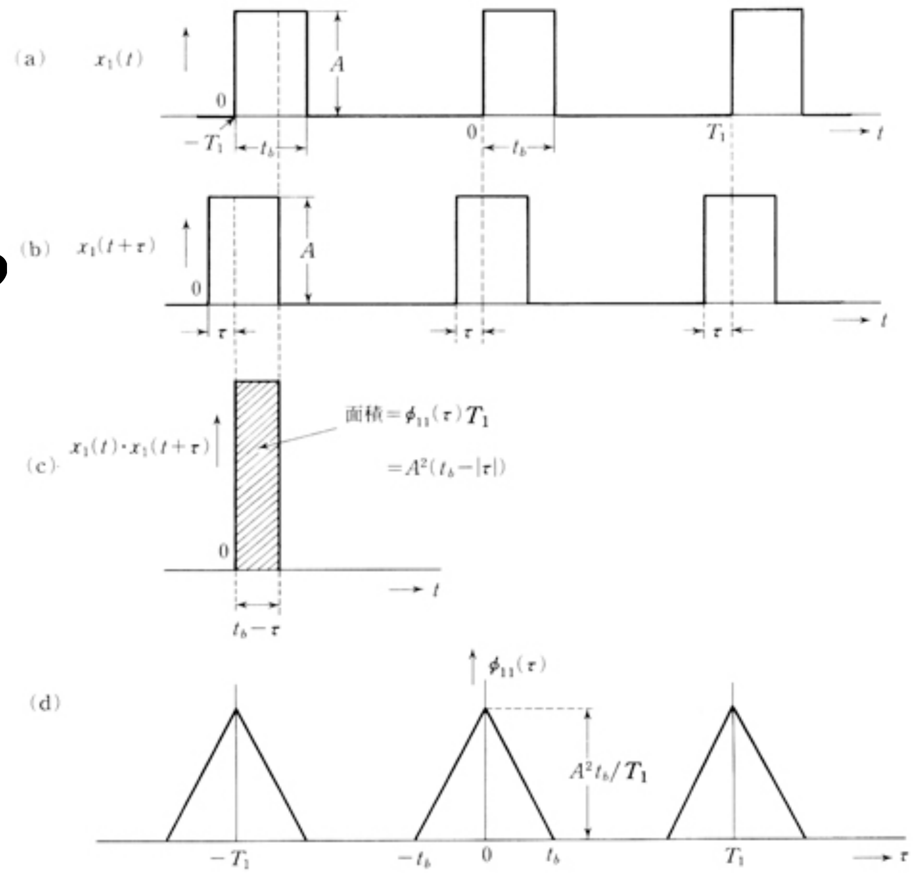
- パワースペクトル：

$$\Phi_{11}(n) = \begin{cases} \dfrac{A^2}{4} & (n = 1) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

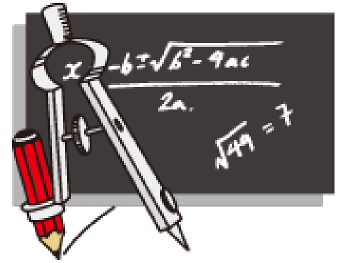
例題：矩形波の自己相関関数



- 矩形波の自己相関関数は
  どのようになるでしょうか
- 数式で考える前に直感的に
  図のように考えてみましょう
- さて数式で確認してみます。



非周期関数の自己相関関数
(ウィナー・ヒンチンの定理)



- 自己相関関数を実関数で且つ非周期関数に拡張します。

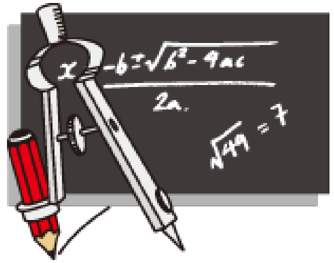
$$\phi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_1(t+\tau) dt$$

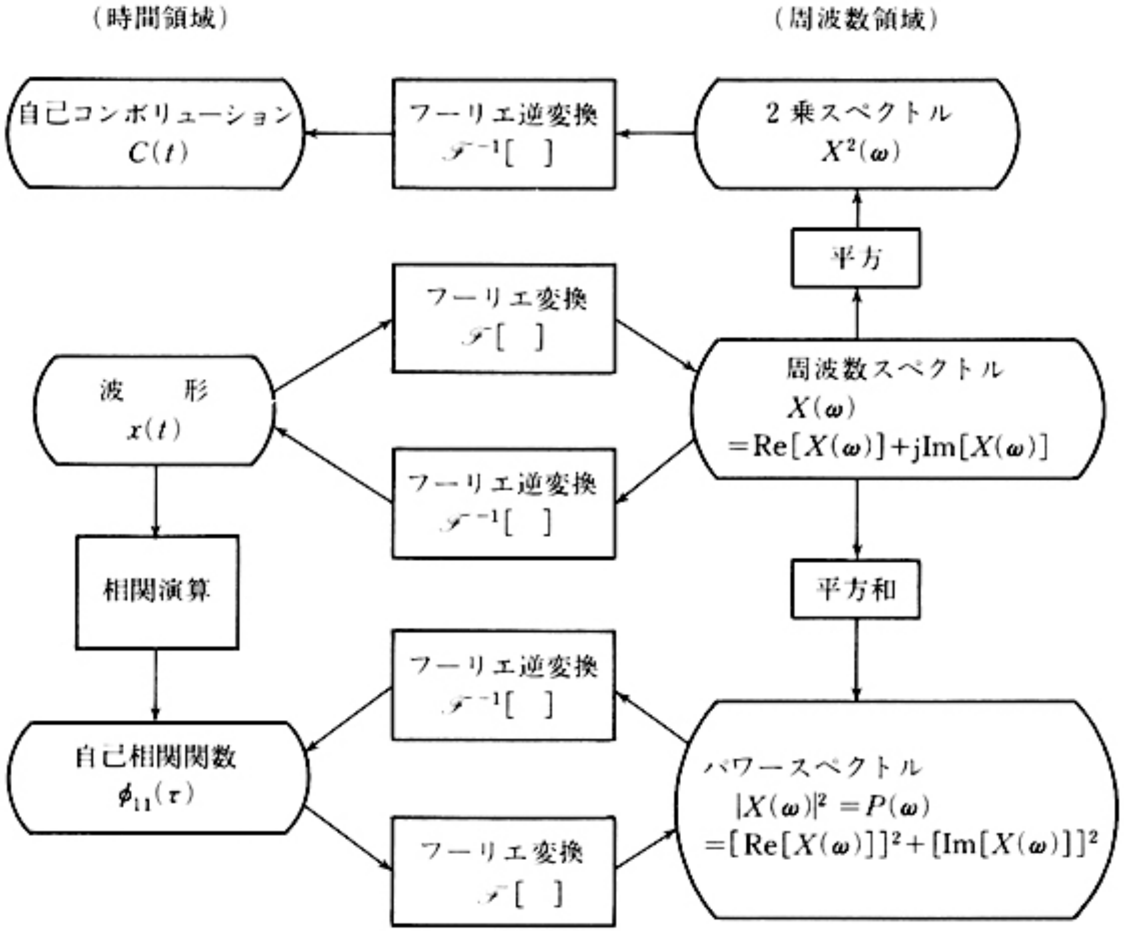
- x1(t)のフーリエ変換X1(ω)とすると次のような関係が成り立ちます。

$$\left| X_1(\omega) \right|^2 = \Phi_{11}(\omega)$$

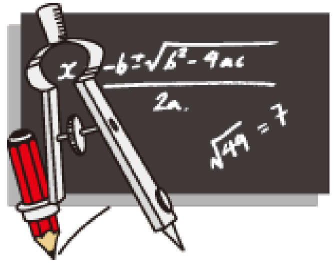
- このことから　$\phi_{11}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{11}(\omega)$　すなわち自己相関関数とパワースペクトルの間にはフーリエ変換対応が成り立つことになります。
- この関係をウイナー・ヒンチンの定理といいます。

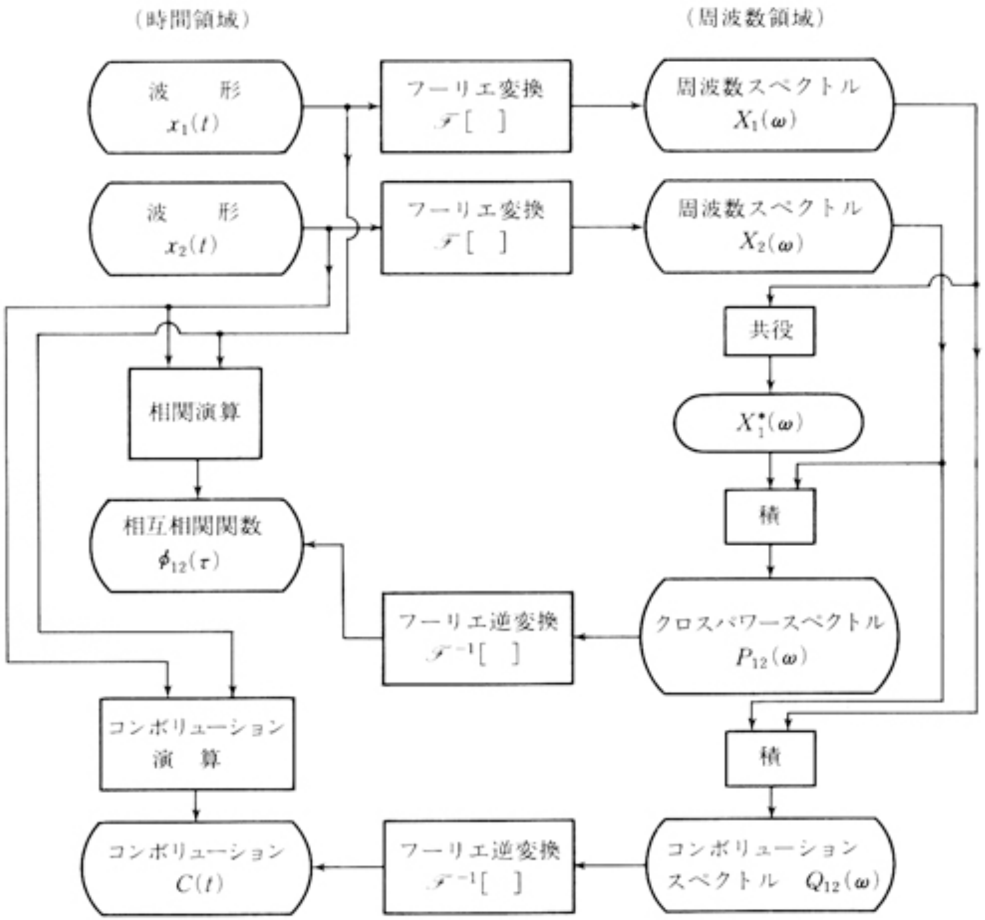
相互関係のまとめ
(１信号の場合)



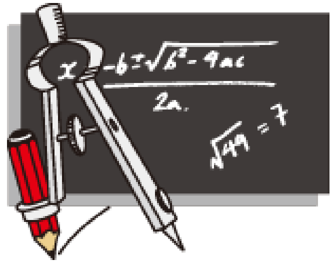


相互関係のまとめ
(２信号の場合)





まとめ



- 相互相関関数
- クロスパワースペクトル
- ウィナー・ヒンチンの定理