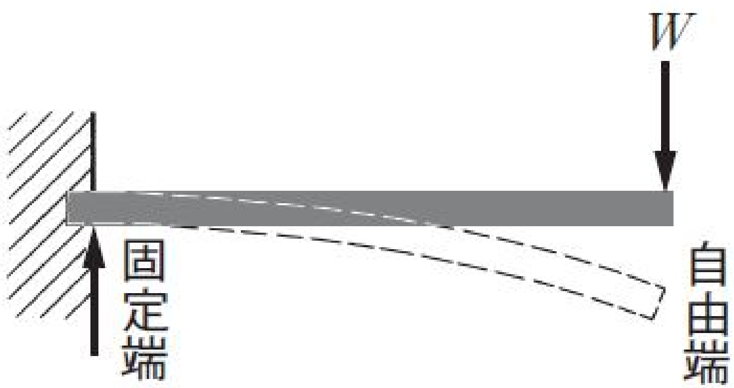
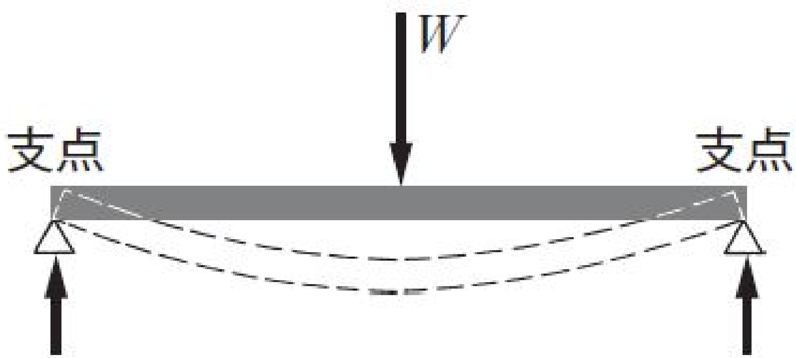
3.3　曲げを受ける部材の強さ

3.3.1 はりに作用する力

(1) はりの種類



(a) 片持ばり



(b) 両端支持ばり

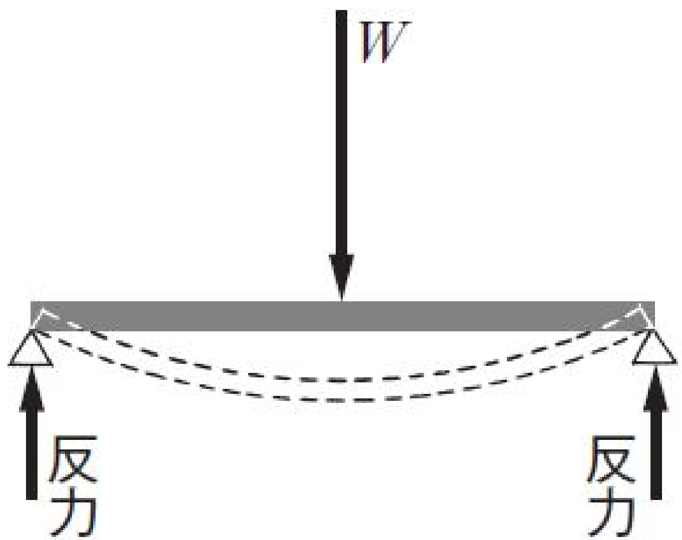
・**片持はり**（ばり）
一端が固定されているはり

固定端：固定されている端
自由端：固定されていない端

・**両端支持はり**
両端で自由に**回転できる**ように支持されたはり

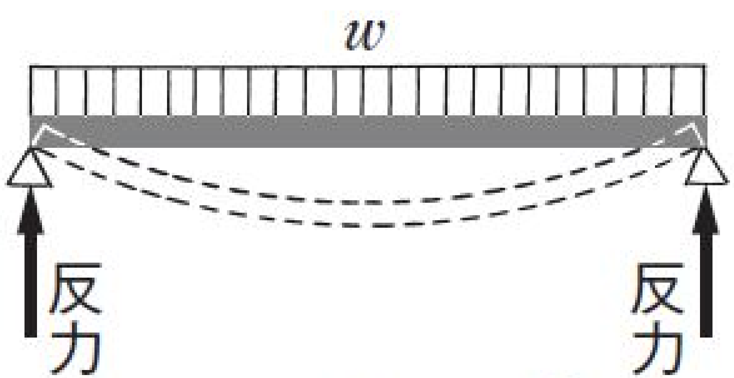
単純支持はりともいう

(2) はりに作用する荷重



(a) 集中荷重

・**集中荷重**
1点に集中して作用する荷重



(b) 分布荷重❷

・**分布荷重**
はりの全長、または一部分に分布して作用する荷重

・**等分布荷重**
単位長さあたりの荷重が一定

(3) はりに作用する力のつり合い

はりに荷重が加わると、反作用で支点に力が働く

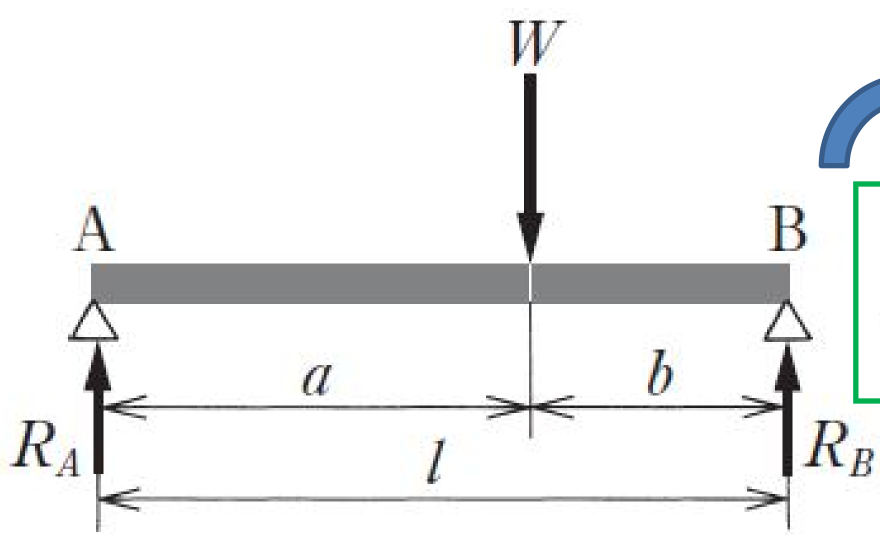
反力という

はりに作用する力がつり合うためには、

① **荷重と反力の和(合力)が0**

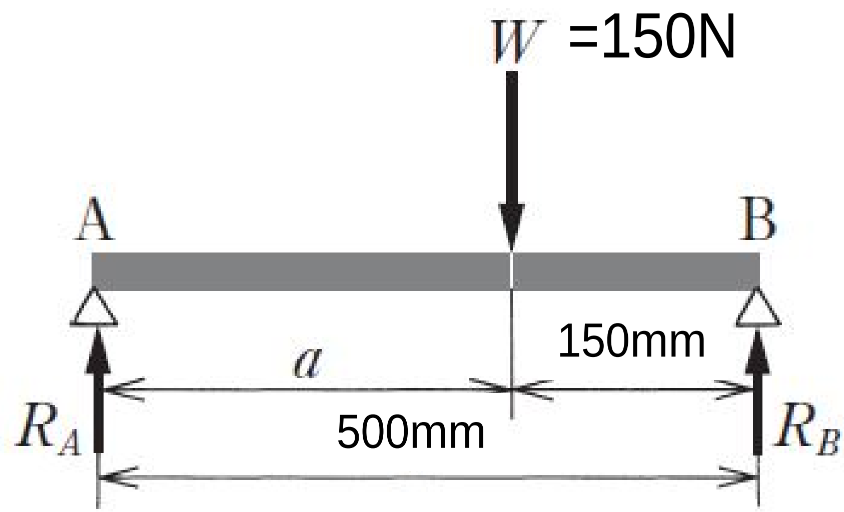
② 任意の点まわりに働く**モーメントの和が0**

である必要がある



$$R_A = \frac{Wb}{l}, \quad R_B = W - R_A = \frac{Wa}{l}$$

例題 9　図 3−18 において，$W = 150$ N，$l = 500$ mm，$b = 150$ mm とするときの反力 R_A，R_B を求めよ。



解 答　式 (3−10) から，

$$R_A = \frac{150 \times 150}{500} = 45 \ [\mathrm{N}]$$

$$R_B = 150 - 45 = 105 \ [\mathrm{N}]$$

$\boxed{答}$　$R_A = 45$ N，$R_B = 105$ N

3.3.2 はりに生じるせん断と曲げモーメント

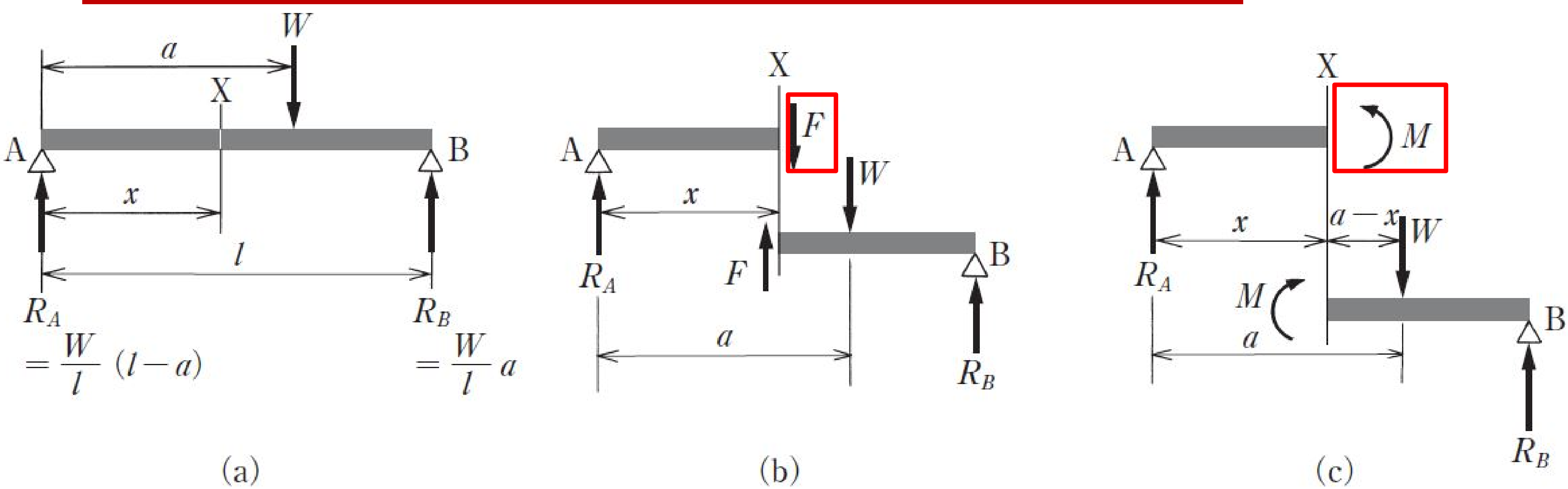
(1) はりに作用する力のつり合い

集中荷重Wが支点Aからaの位置に作用している

支点Aから任意の距離xの位置の仮想断面Xを考え、この断面を境にして、はりを2つに分ける

図(b)：外力とつり合う力F
図(c)：外力モーメントとつり合うモーメントM

が作用する必要がある

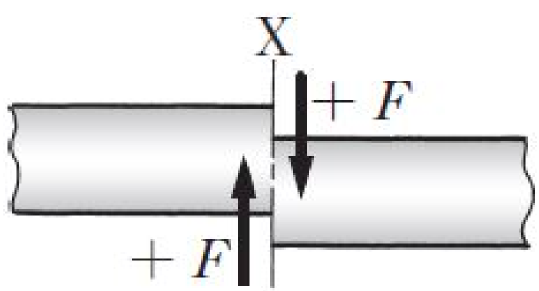


(2) はりに作用するせん断力

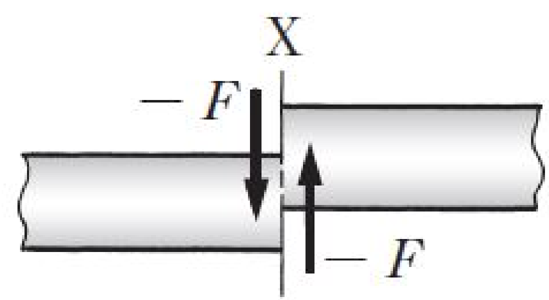
力がつり合っているはりでは、仮想断面Xの両側に作用する力は、大きさが等しく、向きが逆になり、はりをせん断するように作用する

せん断力

$0 \leqq x \leqq a$：$F=R_A$、 $a \leqq x \leqq l$：$F=R_A-W=-R_B$



正のせん断力
(左側に対して右側を下げる方向)



負のせん断力

(3) はりに作用する曲げモーメント

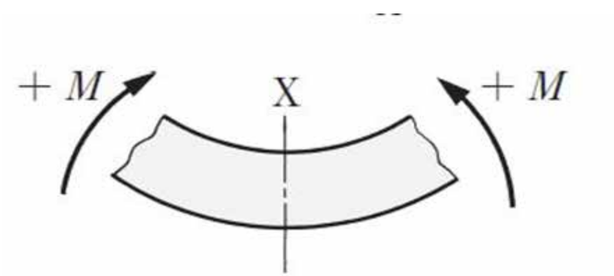
力がつり合っているはりでは、仮想断面Xの両側に作用するモーメントは、**大きさが等しく、向きが逆**になり、はりを**曲げる**ように作用する

曲げモーメント

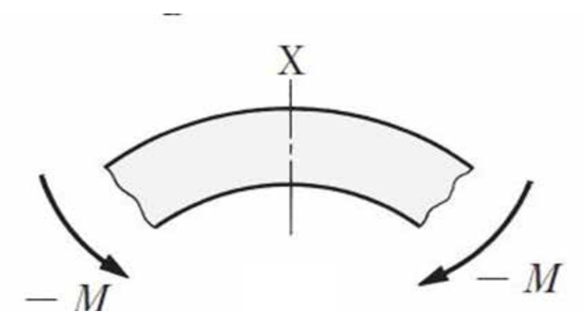
$0 \leqq x \leqq a$：$M=R_A x$

$a \leqq x \leqq l$：$M=R_a x-W(x-a)=R_B(l-x)$

上向きに曲げる



正の曲げモーメント



下向きに曲げる

負の曲げモーメント

例題 10　図 3-19(a) において，$W = 650$ N，$l = 1300$ mm，$a = 900$ mm とするとき，$x = 600$ mm の断面 X における せん断力 F と曲げモーメント M を求めよ。

解答　支点の反力 R_A は，式 (3-10) から，次のようになる。

$$R_A = \frac{Wb}{l} = \frac{W(l-a)}{l} = \frac{650 \times (1300 - 900)}{1300} = 200\ [\mathrm{N}]$$

せん断力 F は，式 (3-11) から，$F = R_A = 200$ [N]

曲げモーメント M は，式 (3-13) より，

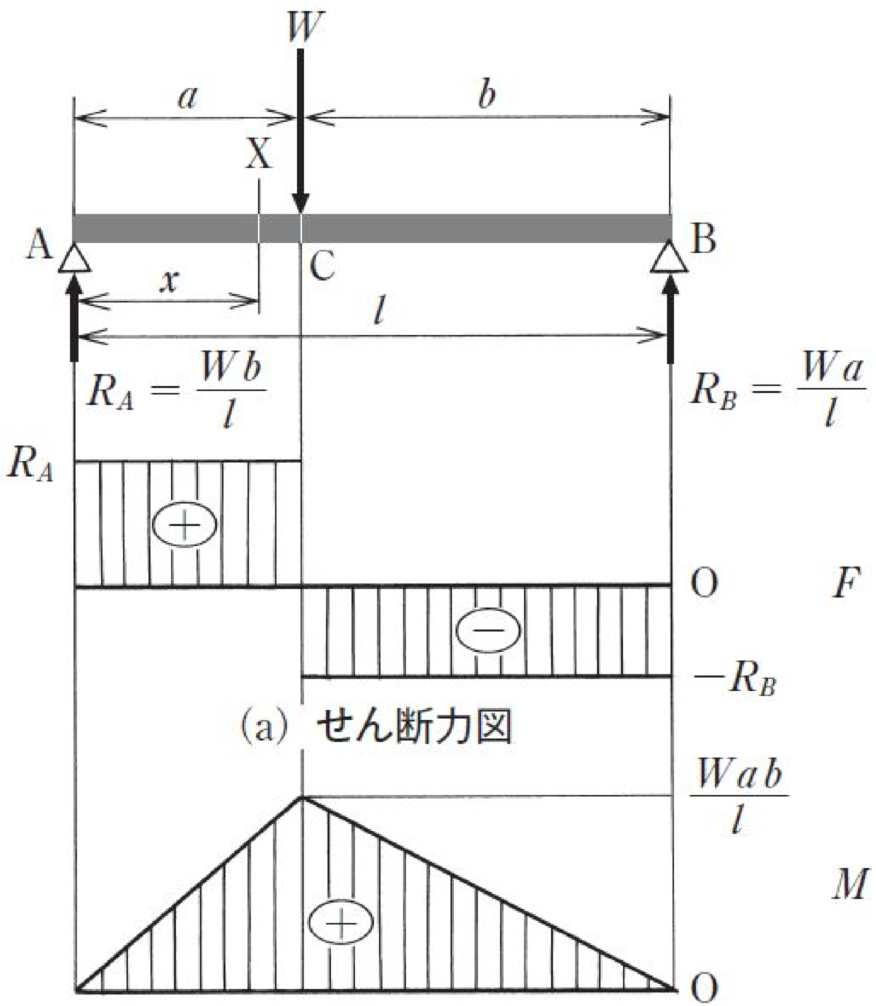
$$M = R_A x = 200 \times 600 = 120000\ [\mathrm{N \cdot mm}] = 120\ [\mathrm{N \cdot m}]$$

答　$F = 200$ N，$M = 120$ N·m

(4) せん断力図と曲げモーメント図

はりに作用するせん断力と曲げモーメントは、
図にするとわかりやすい

せん断力図
曲げモーメント図



(a) せん断力図

(b) 曲げモーメント図

・集中荷重が作用する場合

0≦x≦a では、

せん断力

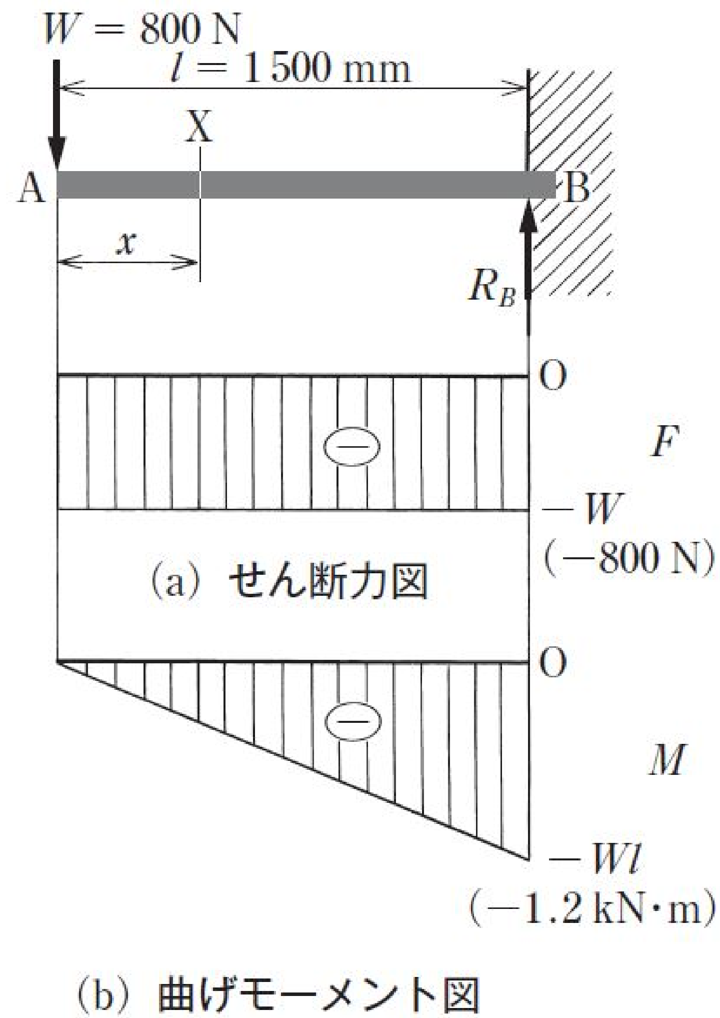
$$R_A = \frac{Wb}{l}$$

曲げモーメント

$$M = R_A x = \frac{Wbx}{l}$$

最大曲げモーメントは、x=aの位置

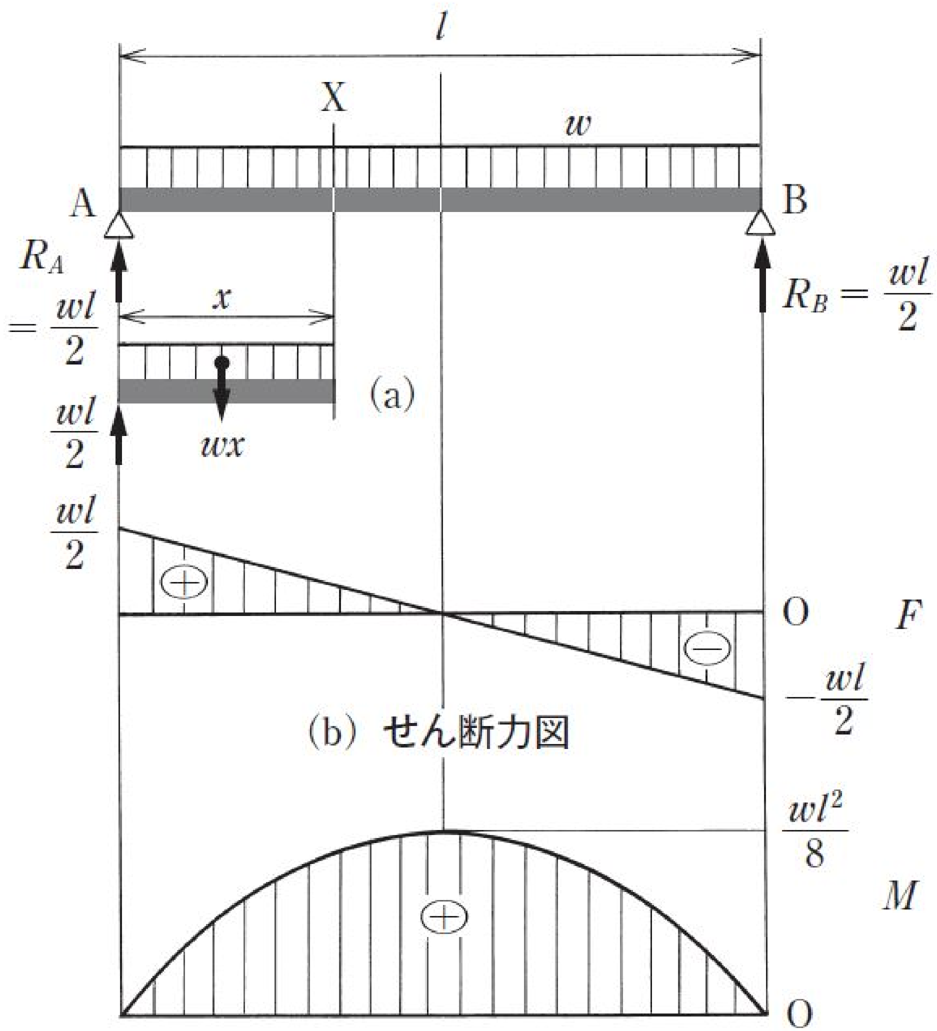
例題 11　図に示すように，断面が一様で長さ $l = 1\,500$ mm の片持ばりの自由端に $W = 800$ N の集中荷重が加わっている。せん断力図と曲げモーメント図を作成し，最大曲げモーメントが生じる断面の位置とその大きさ M_{max} を求めよ。



例題 11 の図

出来るようにしておくこと

・等分布荷重が作用する場合



(c) 曲げモーメント図

・せん断力

反力： $R_A = R_B = \frac{wl}{2}$

距離xの断面では、荷重は*wx*減少する

$$\boxed{F = R_A - wx = \frac{wl}{2} - wx = \frac{w(l - 2x)}{2}}$$

・曲げモーメント

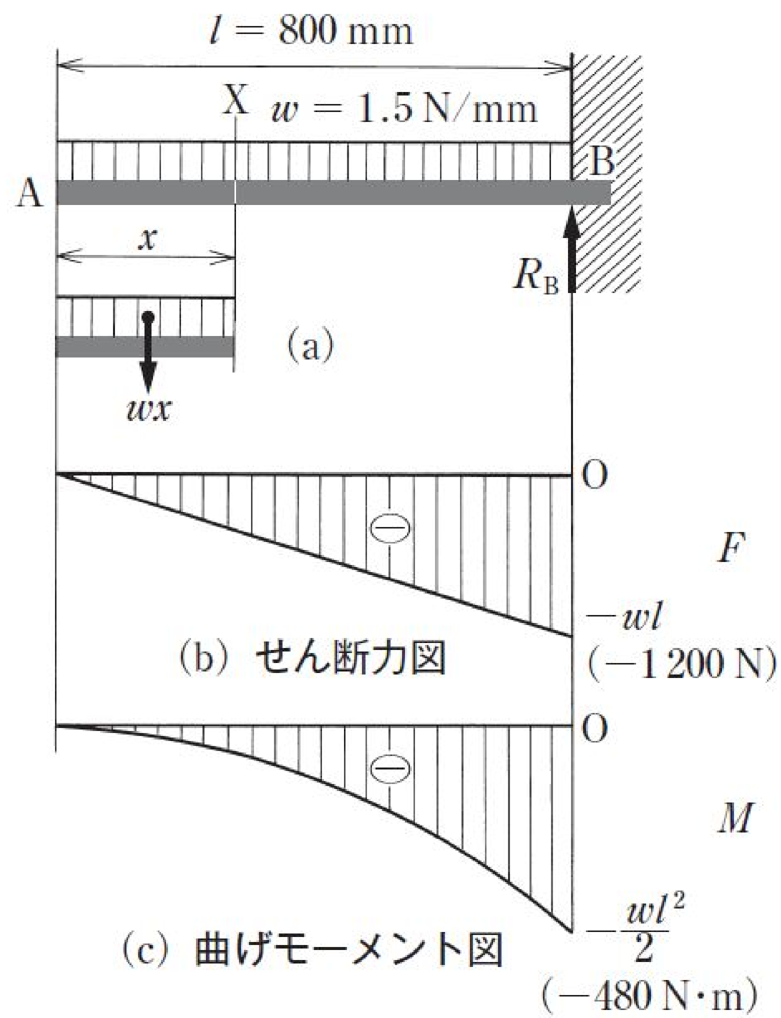
① 支点Aの反力 R_A による正(+)のモーメント $R_A x = \frac{wl}{2}x$

② 断面Xの左側の荷重 wx による負(−)のモーメント $-\frac{wx}{2}x$

$$\boxed{M = \frac{wl}{2} \cdot x - wx \cdot \frac{x}{2} = \frac{w}{2}(lx - x^2)}$$

(放物線になる)

例題 12　図のように，断面が一様の長さ $l = 800$ mm の片持ばりに $w = 1.5$ N/mm の等分布荷重が加わっている。せん断力図と曲げモーメント図をつくり，モーメントが最大となる断面の位置とその大きさ M_{max} を求めよ。

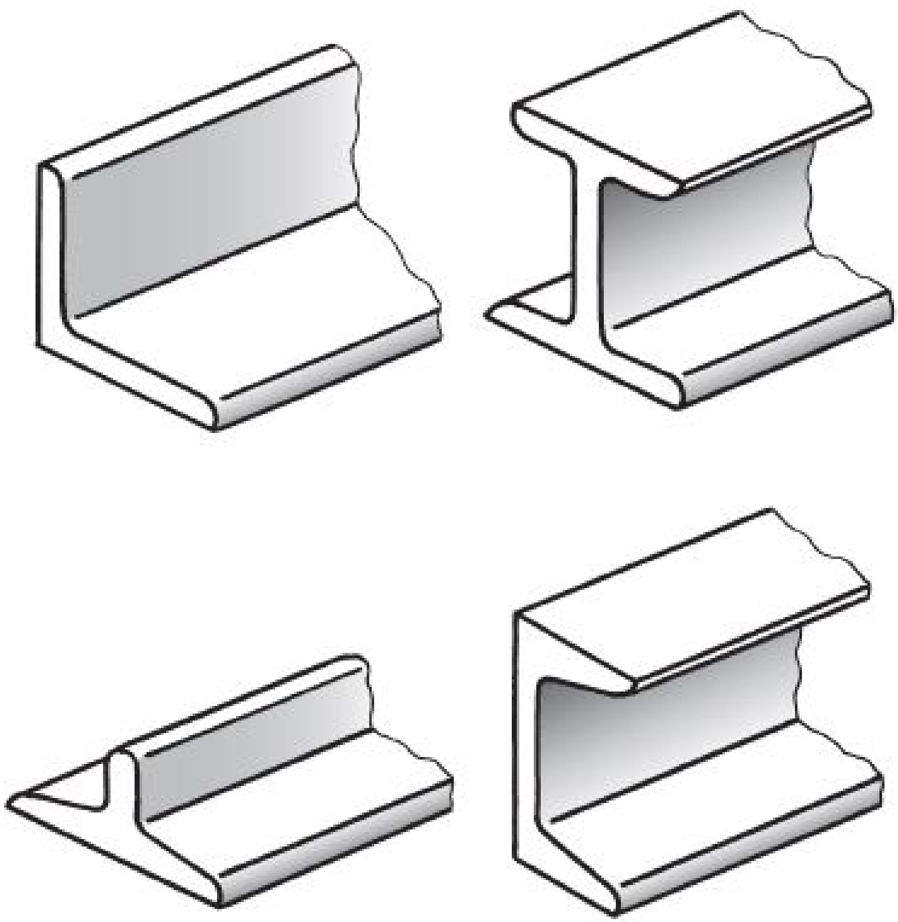


例題 12 の図

材力の授業で出来るようにしておくこと

3.3.3 はりに生じる曲げ応力

形鋼：はりに作用する荷重に対して十分な強さを持つように断面形状が工夫されている



形鋼の形状

はりに生じる曲げモーメントははりの位置で異なる

↓

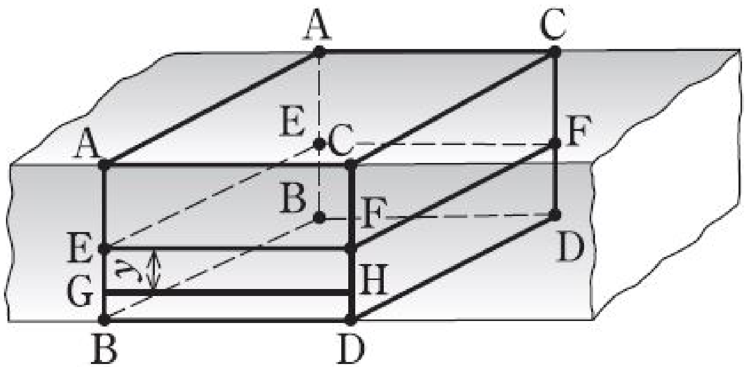
形状が一様なはりでは、最大曲げモーメントが作用する断面の**位置**と**応力**を確認する必要がある

↓

①強度的に耐えられる材料
②応力を小さくする形状

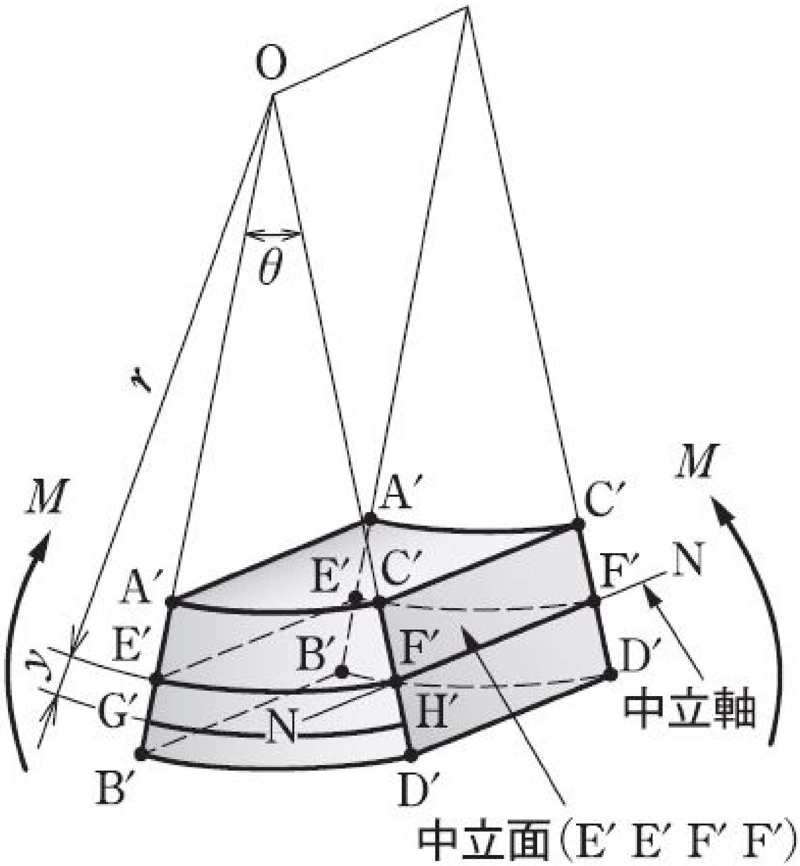
を選択する

(1) はりに作用する曲げ応力



断面AABBと断面CCDDに対して正の曲げモーメントが作用した場合

中立面EEFFより上側：圧縮変形
下側：引張り変形



曲げでは、圧縮応力、引張り応力が同時に生じる

総称して、**曲げ応力**

曲げ応力

中立面（軸）では曲がるが、圧縮·引張りは起こらない

→ 応力とモーメントは0

GHのひずみε：

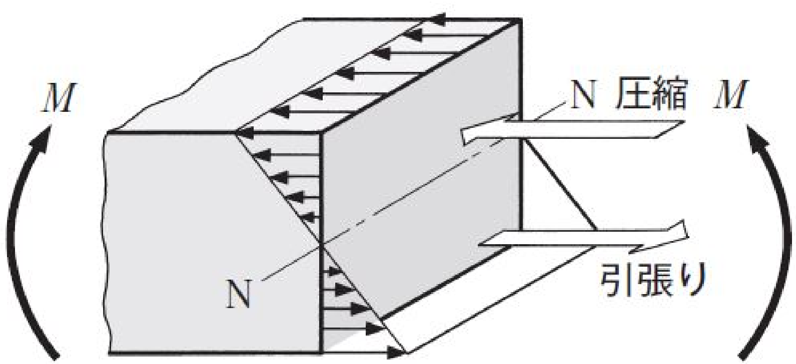
$$\varepsilon = \frac{\widehat{\mathrm{G'H'}} - \mathrm{GH}}{\mathrm{GH}} = \frac{(r+y)\,\theta - r\theta}{r\theta} = \frac{y}{r}$$

応力σ：

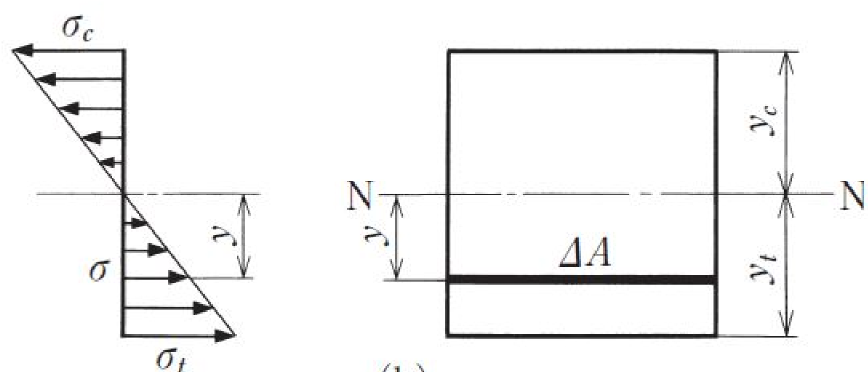
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{r}$$

（中立面からの距離に比例）

縁応力：最上面、最下面に作用する最大応力



(a)



(b)

(2) 断面二次モーメントと断面係数

中立軸からyの距離にある微小面積に垂直に作用する応力などを考えながら、モーメントを表すと、

$$M = \Sigma E \frac{y}{r} \cdot y \Delta A = \frac{E}{r} \boxed{\Sigma y^2 \Delta A}$$

断面二次モーメントI

$$M = \frac{E}{r} I = \frac{\sigma}{y} I, \quad \sigma = \frac{M}{\left(\frac{I}{y}\right)}$$

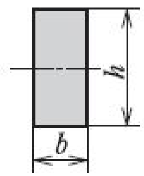
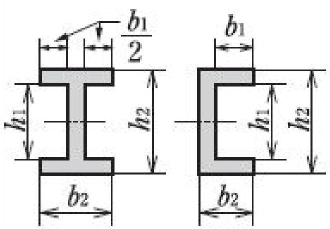
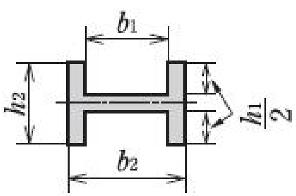
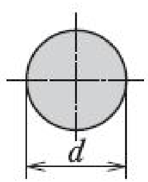
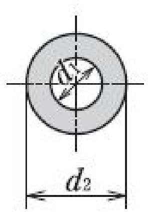
$$\boxed{Z = I/y_{max}}$$

断面係数

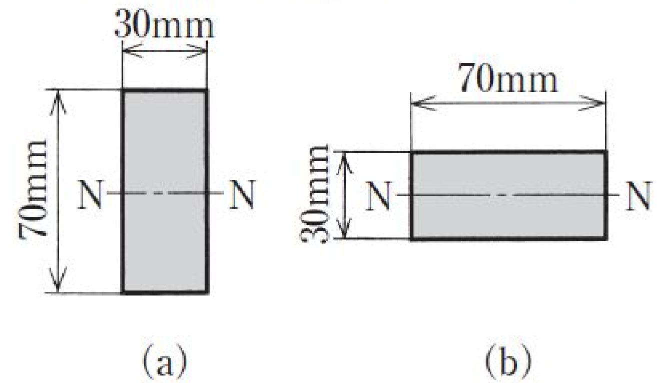
$$M = \sigma_{max} Z, \quad \sigma_{max} = \frac{M}{Z}$$

危険断面：最も強度が弱い（破壊が生じやすい）断面

表３-２　断面積 A，断面二次モーメント I，断面係数 Z

	断　面 [mm]	A [mm^2]	I [mm^4]	Z [mm^3]
1		bh	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{6}bh^2$
2		$b_2h_2-b_1h_1$	$\frac{1}{12}(b_2{h_2}^3-b_1{h_1}^3)$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{b_2{h_2}^3-b_1{h_1}^3}{h_2}$
3		$b_2h_2-b_1h_1$	$\frac{1}{12}\{(b_2-b_1){h_2}^3+b_1(h_2-h_1)^3\}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{(b_2-b_1){h_2}^3+b_1(h_2-h_1)^3}{h_2}$
4		$\frac{\pi}{4}d^2$	$\frac{\pi}{64}d^4$	$\frac{\pi}{32}d^3$
5		$\frac{\pi}{4}({d_2}^2-{d_1}^2)$	$\frac{\pi}{64}({d_2}^4-{d_1}^4)$	$\frac{\pi}{32}\cdot\frac{{d_2}^4-{d_1}^4}{d_2}$

例題 13　図に示すような二つの長方形断面の断面二次モーメント I と断面係数 Z を求めよ。



例題 13 の図

解 答　表 3-2 より，

(a)　$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{30 \times 70^3}{12} = 8.58 \times 10^5 \ [\mathrm{mm}^4]$$

$$Z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{30 \times 70^2}{6} = 2.45 \times 10^4 \ [\mathrm{mm}^3]$$

(b)　$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{70 \times 30^3}{12} = 1.58 \times 10^5 \ [\mathrm{mm}^4]$$

$$Z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{70 \times 30^2}{6} = 1.05 \times 10^4 \ [\mathrm{mm}^3]$$

同じ長方形でも長辺を曲げる方向の方が強度が高い

3.3.4 はりを強くする工夫

(1) 断面係数を大きくする工夫

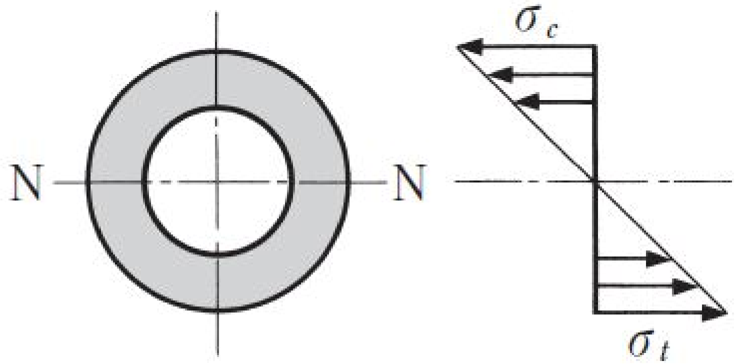
$$M = \sigma_{\max} Z, \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{Z}$$

断面係数を大きくすれば、σ_{max}は小さくなる

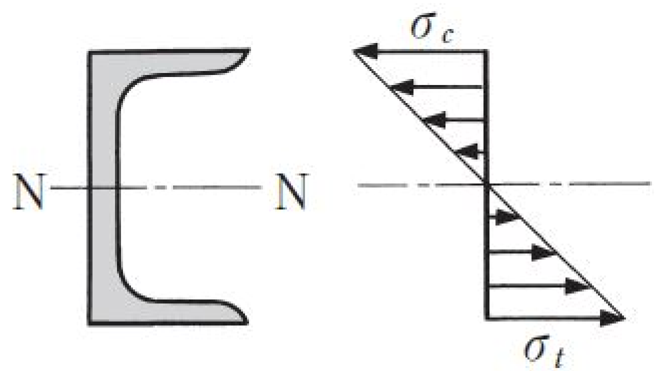
断面係数を大きくする工夫

① 同じ断面積であれば、**断面形状を縦長**にする

② **主要部を外側に配置**して曲げ応力を負担する



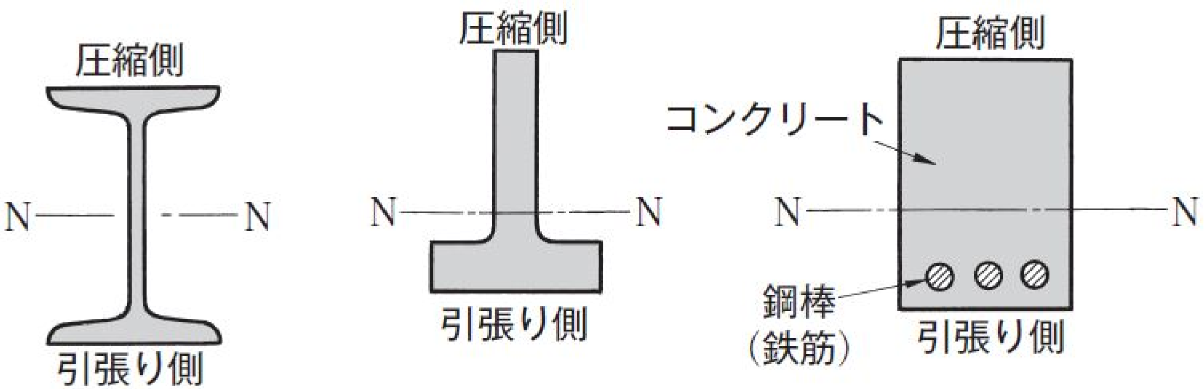
(a)



(b)

(2) 材料の使い方

鉄鋼：引張りと圧縮の強度がほぼ同じ
鋳鉄・コンクリートなど：引張りと圧縮の強度が大きく異なる

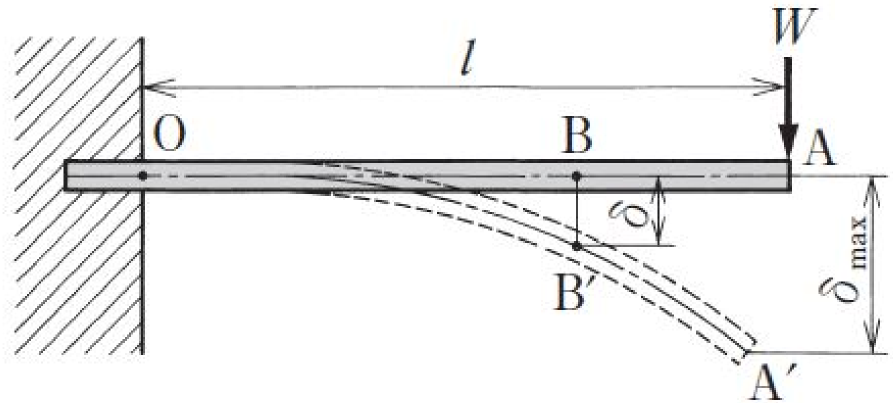


(a)　(b)　(c)

断面形状の工夫や補強をして使用する

材　料	引張強さ [MPa]	圧縮強さ [MPa]
鋳鉄 (FC200)	200 ～ 245	686 ～ 883
花こう岩	14.7	196
普通コンクリート	圧縮強さの $\frac{1}{9}$ ～ $\frac{1}{13}$	24 ～ 40 ❶

3.3.5 はりのたわみ

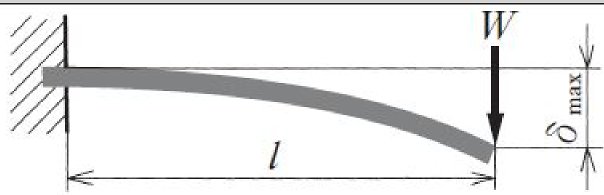
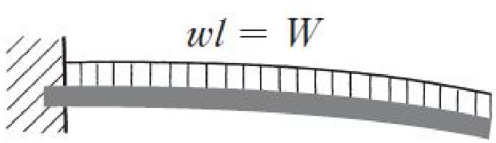
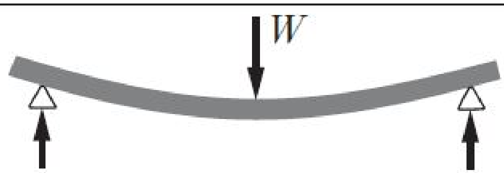
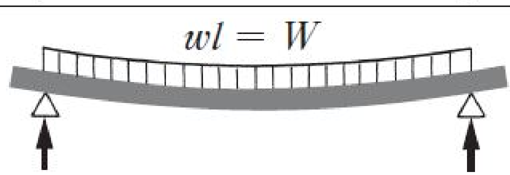


はりの先端に集中荷重が作用

はりは、**たわむ**

最大たわみδ_{max}

表３−４　βの値

番号	はりの種類	β	δ_{max}の位置
1		$\frac{1}{3}$	自　由　端
2		$\frac{1}{8}$	自　由　端
3		$\frac{1}{48}$	中　　央
4		$\frac{5}{384}$	中　　央

$$\delta_{max} = \beta \frac{Wl^3}{1000EI}$$

EI：曲げ剛性

分母なので、この値が大きいほどはわみは少ない

例題 14 長さ $l = 1200$ mm の両端支持ばりの中央に，$W =$ 2.5 kN の集中荷重が作用している。このとき，はりに生じる最大たわみ $\delta_{\max}$ を求めよ。縦弾性係数 $E =$ 206 GPa，はりの断面は直径 $d = 55$ mm の円形とする。

解答 表 3-2 から，

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 55^4}{64} = 449.2 \times 10^3 \ [\mathrm{mm}^4]$$

表 3-4 から $\beta = \dfrac{1}{48}$，$E = 206$ GPa である。

式 (3-19) は，

$$\delta_{\max} = \frac{\beta W l^3}{1000EI} = \frac{2.5 \times 10^3 \times 1200^3}{48 \times 1000 \times 206 \times 449.2 \times 10^3}$$

$$= 0.973 \ [\mathrm{mm}]$$

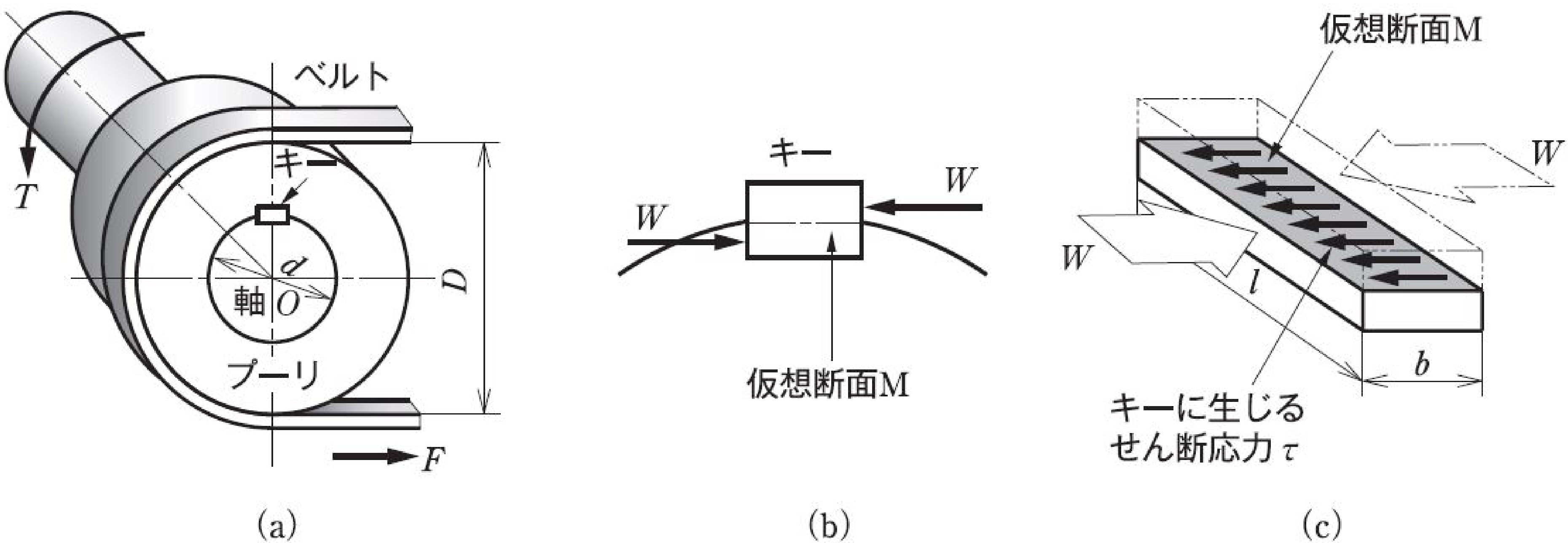
答　0.973 mm

3.4 せん断･ねじりを受ける部材の強さ

3.4.1 せん断を受ける部材

ベルト伝動におけるプーリと軸の**トルク伝達**

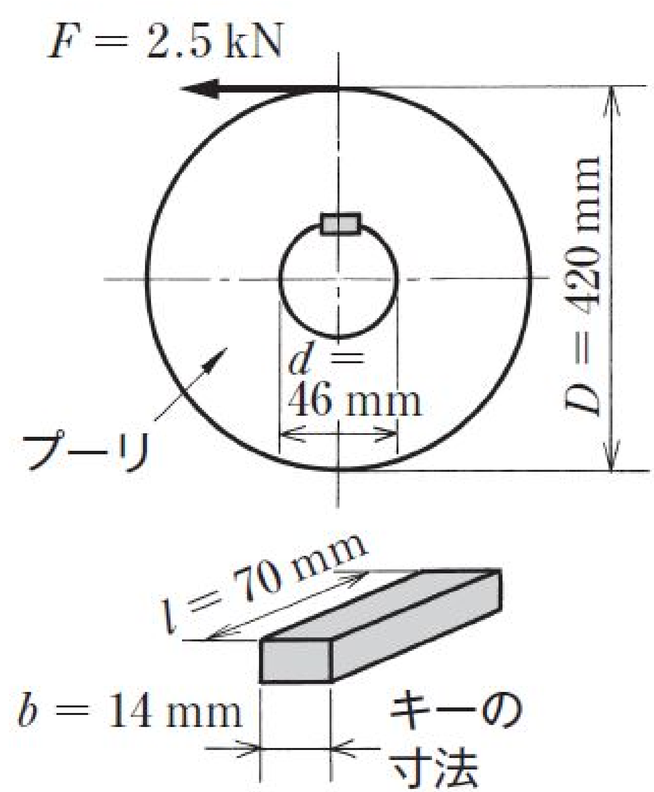
埋め込まれたキーには、**せん断力**が作用する



トルク：プーリを回転させる力のモーメント

回転モーメント、ねじりモーメントともいう

例題 15　図のように直径 $d=46$ mm の軸に幅 $b=14$ mm，長さ $l=70$ mm のキーで固定されている直径 $D=420$ mm のプーリが，ベルトに $F=2.5$ kN の力を伝えている。このとき，キーに生じるせん断応力 τ を求めよ。



例題 15 の図

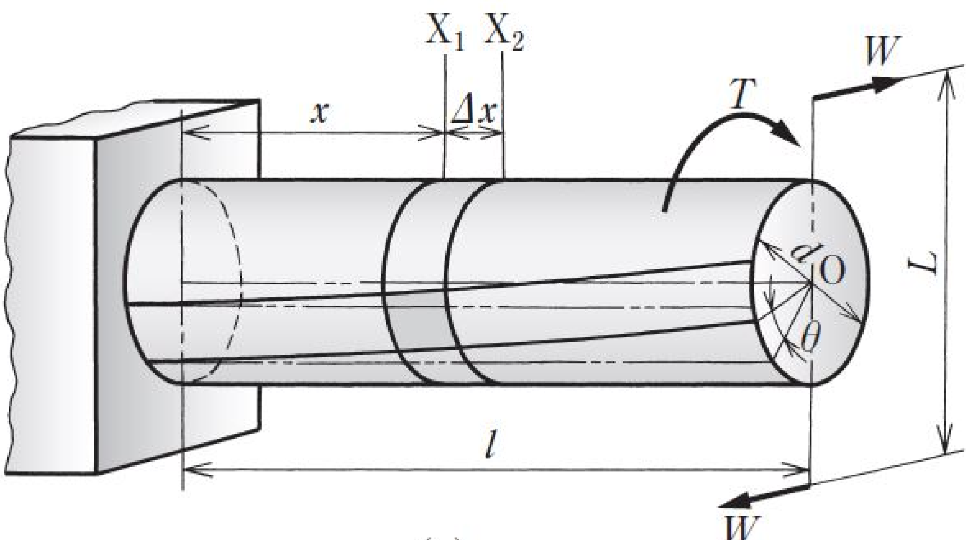
3.4.2 ねじりを受ける軸

(1) 軸のせん断応力とせん断ひずみ

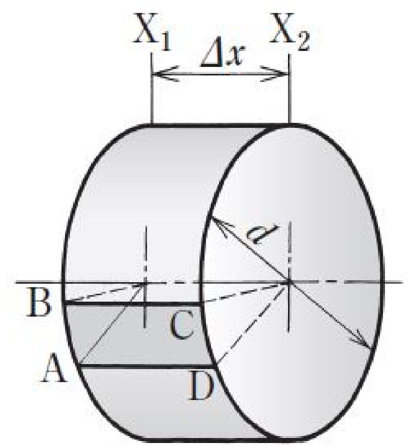
片端が固定され、もう一端に偶力によるねじりモーメントが作用

ひずみ：$\gamma \fallingdotseq \varphi \fallingdotseq \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{DD'}}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\dfrac{d\Delta\theta}{2}}{\Delta x} = \dfrac{d\Delta\theta}{2\Delta x}$ ⇒ $\gamma = \dfrac{d\Delta\theta}{2\Delta x} = \dfrac{d\theta}{2l}$

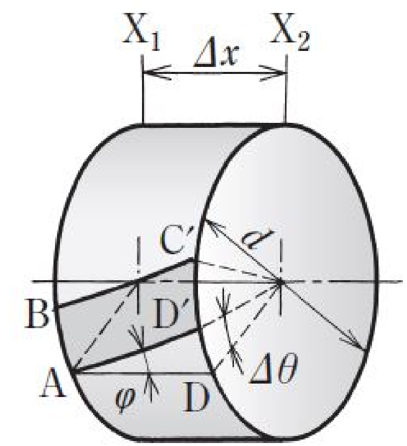
せん断応力：$\tau = 1000\,G\gamma = 1000\,G\dfrac{d\theta}{2l}$



(a)



(b) 変形前



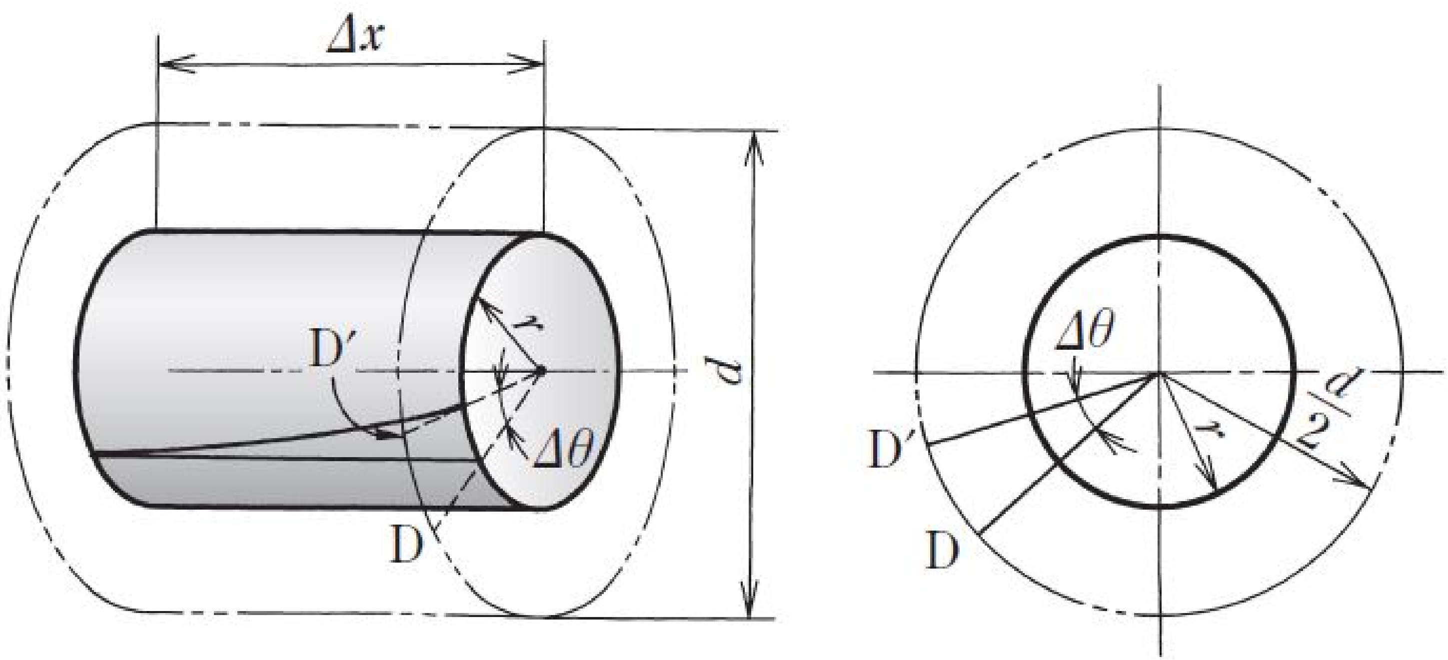
(c) 変形後

軸内部に中心から任意の半径rの円筒面を考える

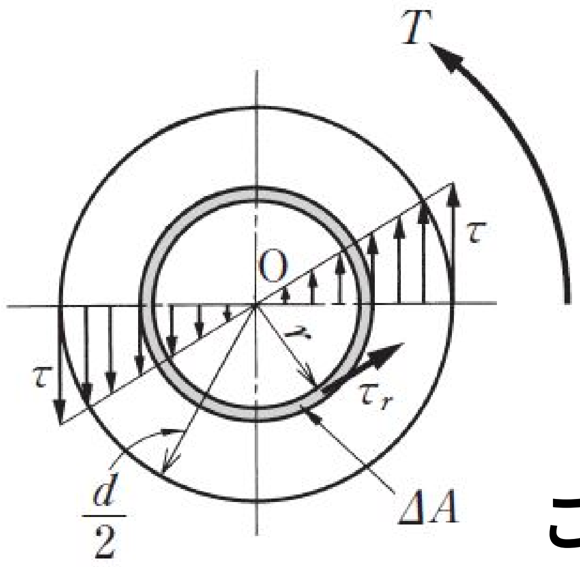
半径rの位置でのせん断応力、せん断ひずみは、

$$\gamma_r = r\frac{\theta}{l} = \frac{2r\gamma}{d}, \quad \tau_r = 1000\,Gr\frac{\theta}{l} = \frac{2r\tau}{d}$$

（式 (3-21)、(3-22) のdを2rに置き換え）



(2) 断面二次極モーメントと極断面係数



半径rの位置に微小断面ΔAの円環を考える

トルクは、

$$T = \Sigma \Delta T = \Sigma \frac{2\tau}{d} r^2 \cdot \Delta A = \frac{2\tau}{d} \Sigma r^2 \cdot \Delta A$$

ここで、 **断面極二次モーメント**

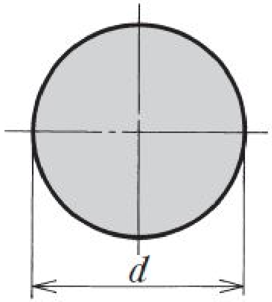
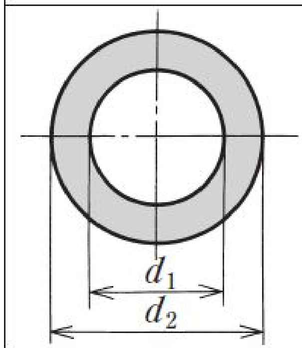
$$\Sigma r^2 \cdot \Delta A = I_p \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$\boxed{T = \frac{2\tau}{d} I_p}$$

$$\frac{2I_p}{d} = Z_p \text{ [mm}^3\text{]}$$

極断面係数

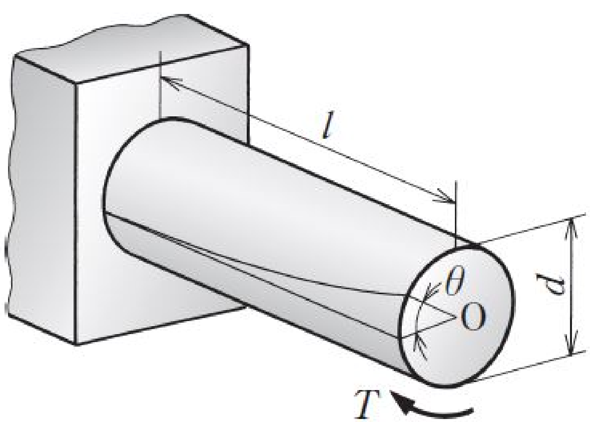
$$\boxed{T = \tau_{\max} Z_p, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{Z_p}}$$

断面 [mm]	I_p [mm^4]	Z_p [mm^3]
	$\frac{\pi}{32} d^4$	$\frac{\pi}{16} d^3$
	$\frac{\pi}{32} (d_2{}^4 - d_1{}^4)$	$\frac{\pi}{16} \left(\frac{d_2{}^4 - d_1{}^4}{d_2}\right)$

極がつかない方は、表3-2

ねじりには、極が付く
曲げには、極は付かない

(3) ねじり剛性



$$\theta = \frac{Td}{2I_p} \cdot \frac{2l}{1000\,Gd} = \frac{Tl}{1000\,GI_p} \quad [\mathrm{rad}]$$

GI_p：**ねじり剛性**

例題 18　直径 $d=55$ mm，長さ $l=2200$ mm の鋼の軸に $T=300$ N·m のねじりモーメントが作用したときの軸端のねじれ角 θ を求めよ。鋼の横弾性係数を $G=82$ GPa とする。

解答　断面二次極モーメント I_p は，表 3-5 から，

$$I_p=\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi\times 55^4}{32}=898.4\times 10^3\ [\mathrm{mm}^4]$$

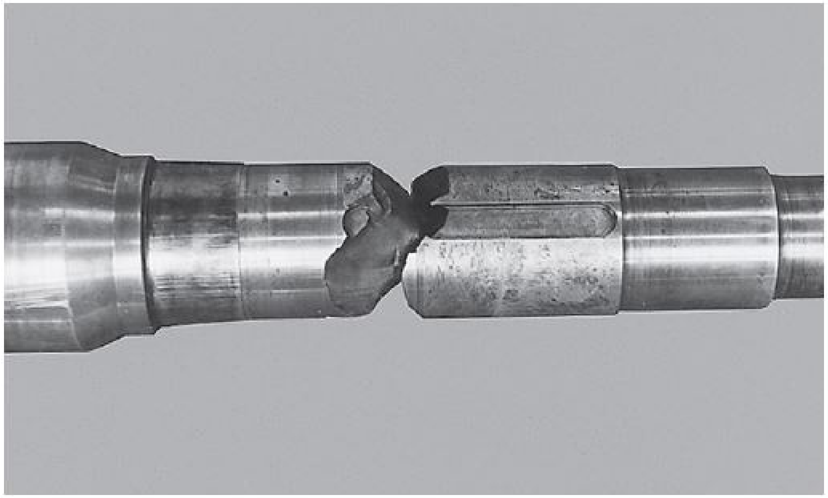
式 (3-26)，(3-27) から，

$$\theta=\frac{Tl}{1000\,GI_p}=\frac{300\times 10^3\times 2.2\times 10^3}{1000\times 82\times 898.4\times 10^3}$$

$$=0.00896\ [\mathrm{rad}]=0.513\ [^\circ]$$

答　0.00896 rad または 0.513°

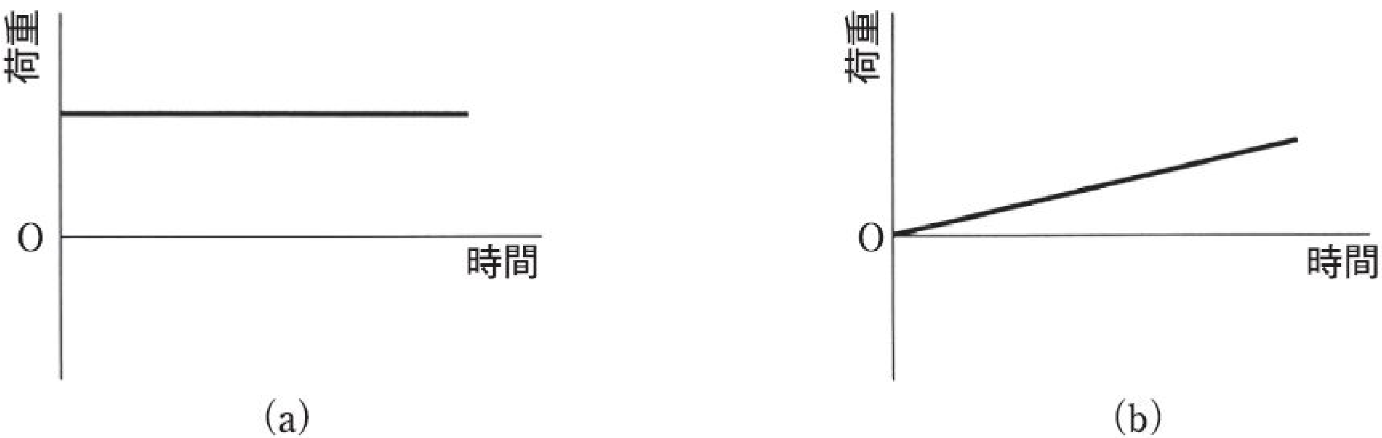
3.5 部材の破壊



機械設計の基本

外力や内力に耐えられること、
要は破壊しないこと

3.5.1 静荷重と動荷重



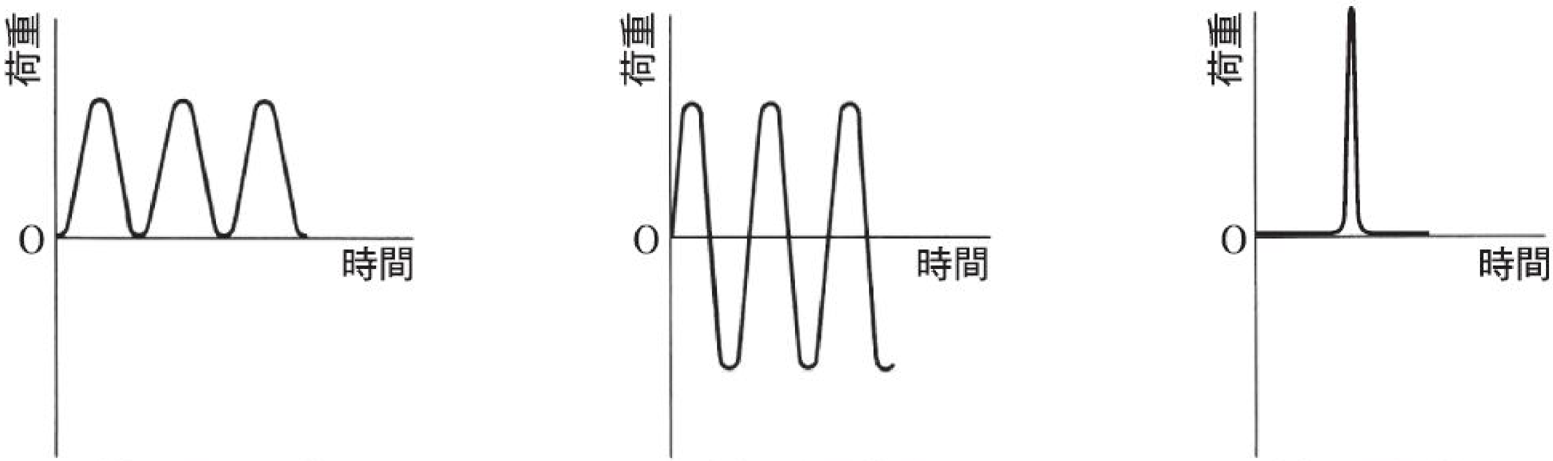
(1)　静荷重

静荷重

- 変動しない
- 極めてゆっくり変動する

動荷重：変動する荷重

- 周期的に繰返して加わる荷重 → **繰返し荷重**
- 正負に向きを変えて加わる繰返し荷重 → **交番荷重**
- 衝撃的に加わる荷重 → **衝撃荷重**



(a) 繰返し荷重　(b) 交番荷重　(c) 衝撃荷重

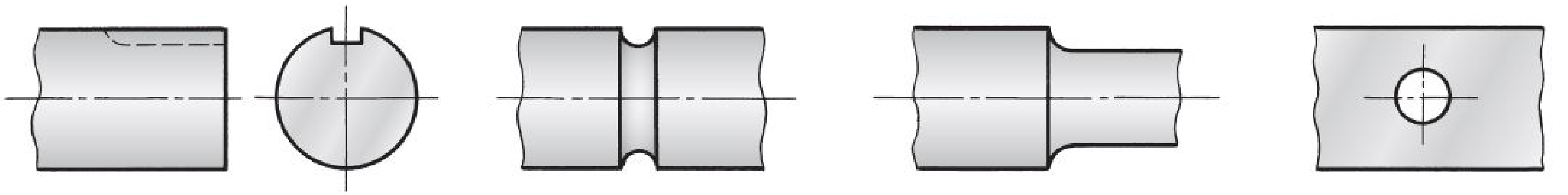
(2) 動荷重

当たり前のことであるが、静荷重よりも動荷重が加わった方が壊れやすい

3.5.2 破壊の原因

(1) 応力集中

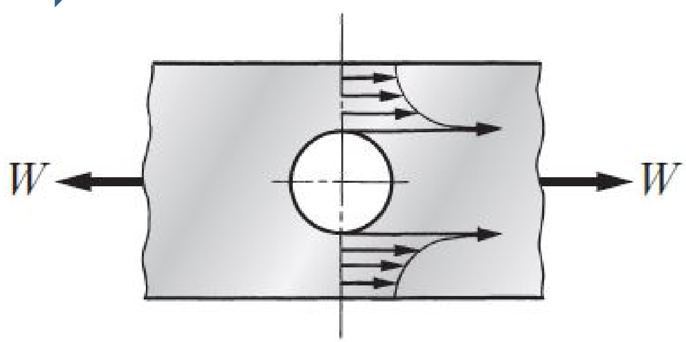
切欠：溝・段・穴などのために断面形状が急に変化



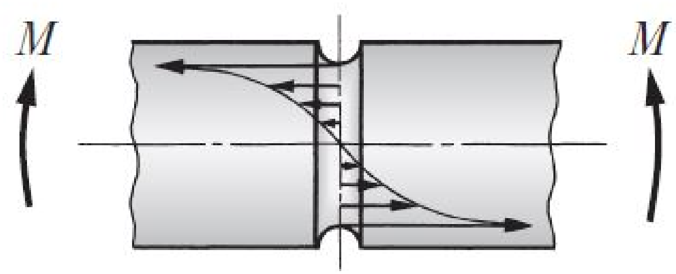
(a) キー溝　(b) 環状の溝　(c) 段　(d) 穴

切欠部分では、通常断面より応力が大きくなる

応力集中



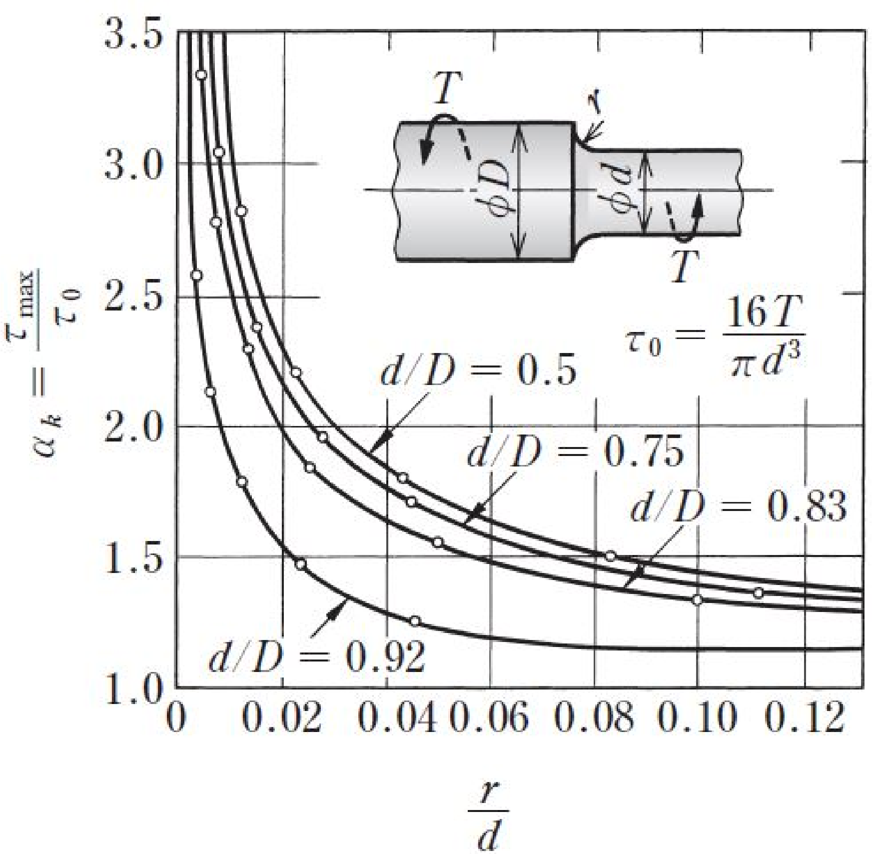
(a) 丸穴をもつ帯板

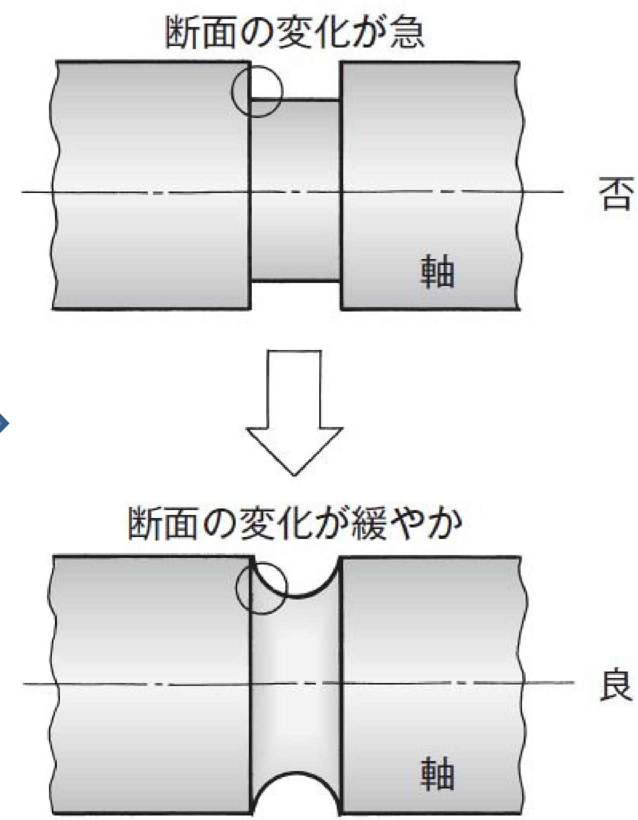


(b) 環状の溝をもつ軸

応力集中による応力上昇は、形状変化の度合いで異なる

➡ **応力集中係数（形状係数）** で表すことができる





r/dが小さいほど、応力が高くなる

形状変化を緩やかにすれば応力集中は小さくできる

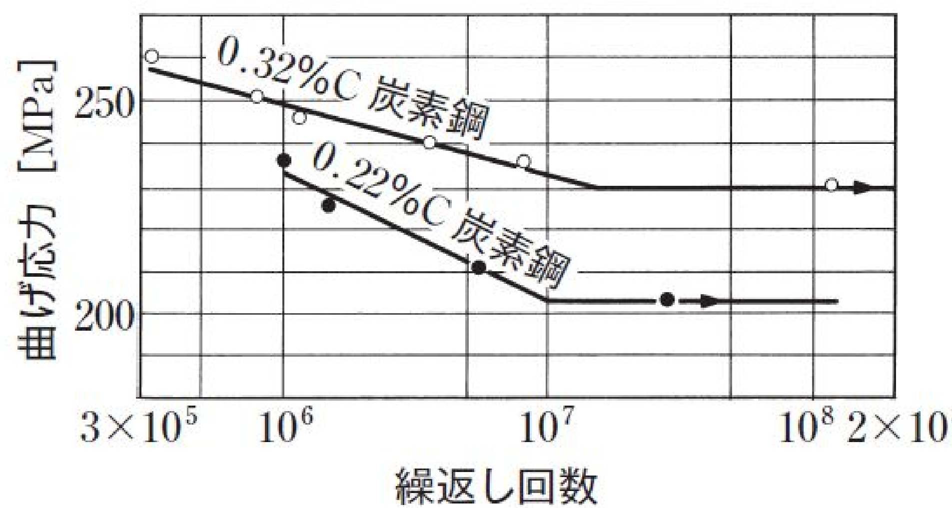
(2) 疲労

部材に繰返し荷重を長時間受けると、静荷重よりもはるかに小さい荷重で破壊を起こすことがある

材料が、**疲労**するため

しかも、材料疲労は累積であり、回復しない

疲労破壊したスプライン軸



疲労限度：
疲労破壊を起こさない荷重

(3) クリープ

高温環境下においては，弾性限界よりも低い応力でも長時間経つと**ひずみは時間とともに微増**する現象

寸法やすきまの管理が厳しい場合には，注意が必要

(4) 低温脆性

低温になると急激に延性を失って、衝撃に対してもろくなる現象

・**体心立方構造の金属**（フェライト鋼など）に生じやすい

・**面心立方構造**の金属（Ni、Al、オーステナイト系ステンレスなど）には見られない

(5) 腐　食

金属製品は，腐食によって破損することが多い
(錆も腐食の1種)

材料の選択，表面処理，コーティング，
塗装等で対策する必要がある

表 2·2　接触腐食程度の順位

順位	材　　　料
1	金，銀，黒鉛
2	ステンレス鋼
3	モネルメタル，ニッケル，インコネル
4	銅，青銅，黄銅
5	鉛，錫
6	鋼，鉄
7	カドミウム
8	アルミニウム
9	亜鉛
10	マグネシウム

腐食の要因として，異種金属の
接触がある (電位差が問題)

金属を接触させると上位の
金属ではなく，下位の金属
に腐食が起こる

3.5.3 安全率と許容応力

許容応力：部材に加えることが許される最大応力
（この応力までは安全）

しかし、材料の**強さには、ばらつき**があり、常に一定ではない。**強さに余裕**を持たせることが必要 → **安全率**

$$
\text{許容応力}\ \sigma_a = \frac{\text{材料の基準強さ}}{\text{安全率}\ S}
$$

表３−６　引張強さ σ_B を基準強さとするときの安全率 S

荷重 ＼ 材料	静荷重	繰返し荷重		衝撃荷重
		片振り*	両振り	
鋼	3	5	8	12
鋳　鉄	4	6	10	15

注　片振り（*）とは図 3−37(2)(a)に示す 1 方向のみの繰返し荷重をいう。

鋼の強度とばらつき

材料の強度はばらつく（±5%）

材料製造工程における非金属介在物，含有ガス濃度，試験片加工時の表面粗さ，試験装置への取付誤差等

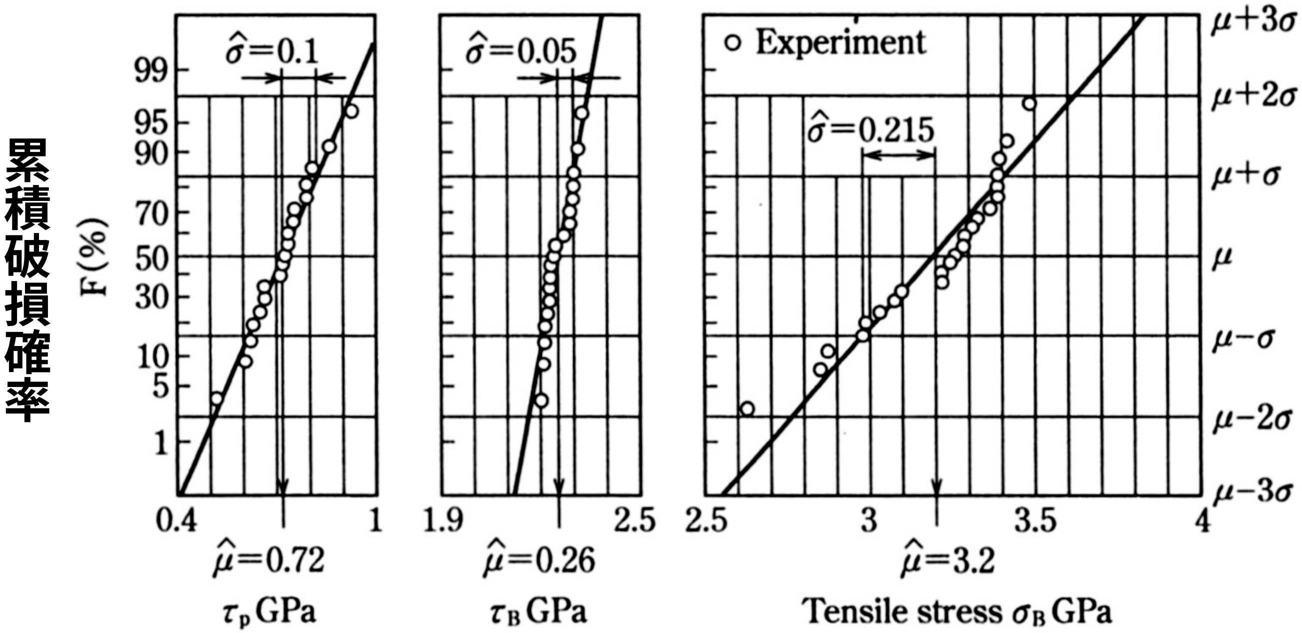


図 2・3　リニア軸受鋼強度のばらつき例（HRC60～64）

ワイブルプロット

ばらつきがなければプロットは傾かない

基準強さ：静荷重や動荷重の許容応力設定の基準として用いられる材料の強さ

①**静荷重**に対する基準強さ

→ 脆性材料では、**引張強さ**

延性材料では、**引張強さ**・降伏点・耐力

②**繰返し荷重**に対する基準強さ

→ **疲労限度**

表３−７　おもな鋼と鋳鉄の引張強さ・降伏点・疲労限度

機械的性質 ＼ 材料		引張強さ σ_B [MPa]	降伏点 σ_y [MPa]	疲労限度 ❹（両振り引張・圧縮）[MPa]
軟鋼	S 20 C（焼ならし）	400 ～ 550	245 ～ 375	155 ～ 245
硬鋼	S 50 C（焼ならし）	610 ～ 780	365 ～ 490	195 ～ 295
鋳鉄	FC 200	200 以上	—	35 ～ 98

例題 19　引張強さが $\sigma_B = 620$ MPa の鋼材について，安全率を $S = 5$ にとった場合の許容応力 σ_a を求めよ。

解答

式（3−29）から，$\sigma_a = \dfrac{\sigma_B}{S} = \dfrac{620}{5} = 124$ ［MPa］

答　124 MPa