

三次元河口流解析用モードスプリット法の提案

二瓶 泰雄¹・大橋 暁²

精度良く陸域環境負荷を考慮した形で沿岸環境計算を行う上で重要な河口流解析法として、計算負荷を大幅に低減させることが可能な三次元河口流モデルを提案する。その際に、沿岸環境モデルで用いられるモードスプリット法の考え方を応用して、「三次元計算」と「鉛直二次元計算」を組み合わせる新しいモードスプリット法を開発し、計算負荷の大きい三次元計算の回数を減らすことで計算時間を大幅に短縮することを試みる。また、本モデルの有効性を検証するために、密度フロントのテスト計算を行ったところ、本モードスプリット法は計算誤差を抑制したまま CPU 時間を大幅に減らし得ることが示された。

1. はじめに

沿岸海域環境管理を行う上では、河川経由の陸域環境負荷を精度良く評価する必要がある。通常、陸域負荷調査は、海と川の接続点よりも上流地点で行われるため、沿岸環境シミュレーションを行う際には、陸域負荷が境界条件として与えられる河川上流地点と沿岸域をつなぐ河口流モデルの取り扱いが重要となる。

一般的な沿岸環境計算では、河川部分についても沿岸域と同一の計算モデルや座標系が採用される（例えば、田中，2001）。しかしながら、河口域では、密度流による鉛直循環や浮泥層の存在、湾筋や浅場等による地形変化に起因して、鉛直方向のみならず横断方向の流れ・地形・水底質環境変化が顕在化している。そのため、沿岸計算において、河口域での物質循環過程を正確に考慮した形で陸域負荷評価を行うためには、横断方向に十分な格子解像度を確保した三次元河口流解析が望ましいが、現状の沿岸環境計算では、このような要求を満足する数値モデルは存在しない。また、河口流計算用として横断方向平均された鉛直二次元流動モデルが提案されているが（鈴木・石川，1999；安達ら，2002），ここでは横断面内の地形変化は考慮されているものの、流速や水質等の横断変化は陽的には取り扱われておらず、これらの数値モデルも上記の要請を満たしていない。

本研究では、沿岸環境モデルとリンクすることを念頭にして、計算負荷を大幅に減らすことが可能な三次元河口流モデルを構築することを目的とする。そのため、ここでは、沿岸モデルにおいて「三次元計算」と「平面二次元計算」を併用するモードスプリット法（Madala & Piacsek, 1977；Blumberg & Mellor, 1983）の考え方を応用して、「三次元計算」と「鉛直二次元計算」を組み合わせる新しいモードスプリット法を開発し、三次元

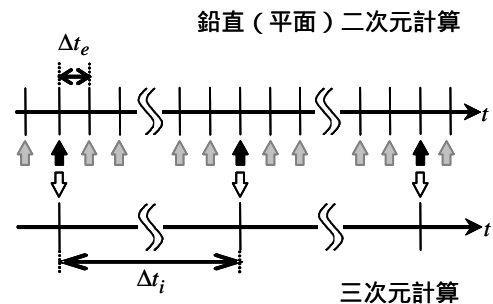


図-1 本モードスプリット法における計算時間間隔の設定

計算の回数を減らすことで計算時間を大幅に短縮することとする。また、本モデルの基本的な有効性を検証するために、密度フロントを対象としたテスト計算を実施し、本モードスプリット法の計算精度や計算時間を検討する。

2. 本計算モデルの概要

(1) 基本的な考え方

既存のモードスプリット法では、数値モデルを三次元計算の部分と平面二次元計算の部分に分割して計算を行う。ここでは、図-1 に示すように、平面二次元計算を毎ステップ、三次元計算を数～数十ステップに一度の割合で実施している。この三次元計算を行うステップでは、三次元計算と平面二次元計算の結果を交換し、両計算の整合性を維持する。この手法では、三次元計算に対する計算時間間隔を平面二次元計算よりも大きく設定し、三次元計算の回数を減らすことにより、計算時間を大幅に短縮している。

それに対して、本研究では、「流速や密度の鉛直変化が横断変化よりも顕著である」という河口流場の特徴を考慮したモードスプリット法を構築する。具体的には、数値モデルを三次元計算と平面二次元計算に分割する代わりに、「三次元計算」と「鉛直二次元計算」を併用するモードスプリット法とする。ここで用いる基礎方程式系としては、三次元計算では三次元運動方程式や連続式、

1 正会員 博(工) 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科
2 学生会員 学(工) 東京工業大学大学院 情報理工学研究所情報環境学専攻

密度保存則を選定するのに対して，鉛直二次元計算では，三次元計算の基礎方程式を横断方向平均して導出された式系を用いる．また，本モードスプリット法における三次元計算と鉛直二次元計算の取り扱いに関しては，図-1 に示す既存の枠組みと同様に，毎ステップにおいて鉛直二次元計算を行い，数～数十ステップに一回三次元計算を実施して両者の計算結果を交換することとする．

(2) 基礎方程式系

a) 三次元場

本モデルの基礎方程式系を以下に示す．まず，三次元場における基礎方程式系は，三次元 NS 方程式と連続式，密度保存則である．ここで計算に用いる座標系として，図-2 に示すように，水平方向には直交曲線座標系 (s, n) (例えば，土木学会，1999)，鉛直方向には σ 座標系 (Phillips, 1957) を採用する．これらの (s, n, σ) 座標系を導入することにより，蛇行・湾曲する河道平面形や複雑に変化する底面形状を簡便かつ適切に表現することが可能となる．これらの座標系及び沿岸計算で一般的な静水圧近似を採用する場合，三次元流動場の連続式と運動方程式は以下の通りである．

・連続式

$$\frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s} (Du_s) + \frac{\partial}{\partial n} (Du_n) + \frac{Du_n}{(1+N)R} + \frac{\partial w^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

・運動方程式 (s 方向)

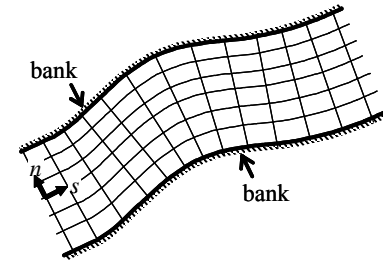
$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{u_s}{1+N} \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{w^*}{D} \frac{\partial u_s}{\partial \sigma} + \frac{u_s u_n}{(1+N)R} = P_s + F_s \quad (2a)$$

・運動方程式 (n 方向)

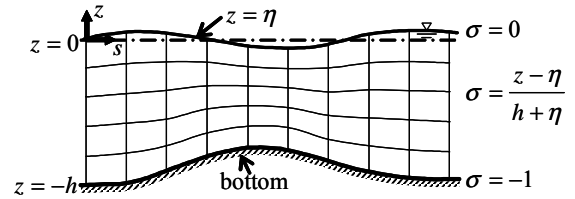
$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u_s}{1+N} \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{w^*}{D} \frac{\partial u_n}{\partial \sigma} - \frac{u_s^2}{(1+N)R} = P_n + F_n \quad (2b)$$

ここで， u_s, u_n, w^* は s, n, σ 方向流速， D は全水深 ($=\eta+h$ ， η ：水位， h ：水深)， g は重力加速度， R は s 方向座標の曲率半径， $N=n/R$ ， P_s, P_n は s, n 方向の圧力勾配項， F_s, F_n は s, n 方向の乱流拡散項をそれぞれ表す．この圧力勾配項 P_s, P_n は，静水圧近似を用いる場合，次のように与えられる．

$$P_s = -\frac{g}{1+N} \frac{\partial (D+z_b)}{\partial s} + \frac{gD}{\rho_0(1+N)} \int_{\sigma}^0 \frac{\partial \rho'}{\partial s} d\sigma' + \frac{g}{\rho_0(1+N)} \int_{\sigma}^0 \frac{\partial D}{\partial s} \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'} d\sigma' \quad (3a)$$



(a) 水平座標系



(b) 鉛直座標系

図-2 計算で用いる座標系

$$P_n = -g \frac{\partial (D+z_b)}{\partial n} + \frac{gD}{\rho_0} \int_{\sigma}^0 \frac{\partial \rho'}{\partial n} d\sigma' + \frac{g}{\rho_0} \int_{\sigma}^0 \frac{\partial D}{\partial n} \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'} d\sigma' \quad (3b)$$

ここで， ρ_0 は基準密度， ρ' はその場の密度と基準密度の差， z_b は河床面の地盤高さである．座標系をそのまま用いると，地形変化の大きいところでは圧力勾配項に大きな誤差が生じることが指摘されているが (Stelling & Kester, 1994)，ここでは誤差補正をせずに式 (3a)，(3b) の式をそのまま用いる．また，乱流拡散項に関しては，座標系変換時に生じる高次項は無視した形を (Mellor and Blumberg, 1985)，乱流モデルとしては 0 方程式モデルを，それぞれ採用し定式化しているが，その式系については，ここでは省略する．

式 (3) に含まれる密度を求めるために，次式で与えられる三次元場の密度の移流拡散方程式を用いる．

$$\frac{\partial D\rho}{\partial t} + \frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s} (Du_s\rho) + \frac{\partial}{\partial n} (Du_n\rho) + \frac{\partial w^*\rho}{\partial \sigma} = F_\rho \quad (4)$$

ここで， F_ρ は密度の乱流拡散項である．なお，河口域や沿岸海域における密度流解析を行う上では，水温と塩分濃度に対する移流拡散方程式を解き，その得られた結果より密度を求めることが一般的である．しかしながら，後述するテスト計算では，密度値のみが計算上必要となるので，ここでは，水温や塩分濃度の代わりに密度の移流拡散方程式を基礎式として用いる．

b) 鉛直二次元場

鉛直二次元場における基礎方程式系は，前述した式

(1) から (4) の三次元場の式系を横断方向に平均したものであり、以下のように与えられる。

・連続式

$$\frac{\partial}{\partial s}(B\overline{Du_s}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(B\overline{w^*}) + \frac{\partial}{\partial t}(B\overline{D}) + G_c = 0 \quad (5)$$

・運動方程式 (s 方向)

$$B \frac{\partial}{\partial t}(\overline{Du_s}) + \frac{\partial}{\partial s}(B\overline{Du_s^2}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(B\overline{Du_s}) = \overline{DP_s} + \overline{DF_s} + G_s \quad (6)$$

・密度保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{D\rho}) + \frac{\partial}{\partial s}(\overline{Du_s\rho}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\overline{Dw^*\rho}) = \overline{F\rho} + G_\rho \quad (7)$$

ここで、 B は各断面の横断方向幅、各変数の $\overline{\quad}$ は横断方向平均値を表している。また、各式中の G_c と G_s 、 G_ρ は三次元計算結果を鉛直二次元計算に反映させるための補正項であり、一例として、連続式の補正項 G_c を以下に示す。

$$G_c = \int_{-B/2}^{B/2} \left(\frac{1}{1+N} \frac{\partial Du_s}{\partial s} \right) dn - \frac{\partial}{\partial s}(B\overline{Du_s}) + \int_{-B/2}^{B/2} \left(\frac{Du_n}{(1+N)R} \right) dn \quad (8)$$

これらの補正項を用いて鉛直二次元計算を行うことにより、流れや密度場の横断方向変化を取り込んだ形で鉛直二次元計算を実施することが可能となっている。

(3) 計算手順

上述された基礎方程式系を用いて、三次元計算と鉛直二次元計算を実施する。計算手順は、鉛直二次元計算のみの計算ステップと鉛直二次元計算と三次元計算の両方を行う計算ステップでは異なっており、次に示すようになっている。

【鉛直二次元計算のみを行うステップ】

鉛直二次元 NS 方程式、連続式、密度保存則 (式 (5) ~ (7)) を計算し、横断平均水位、流速、密度を求める。

【鉛直二次元・三次元計算の両方を行うステップ】

三次元計算結果の横断平均値を で行われた横断平均水位、流速、密度に置き換える。

三次元 NS 方程式、連続式、密度保存則 (式 (1) ~ (4)) より水位、流速、密度を計算する。

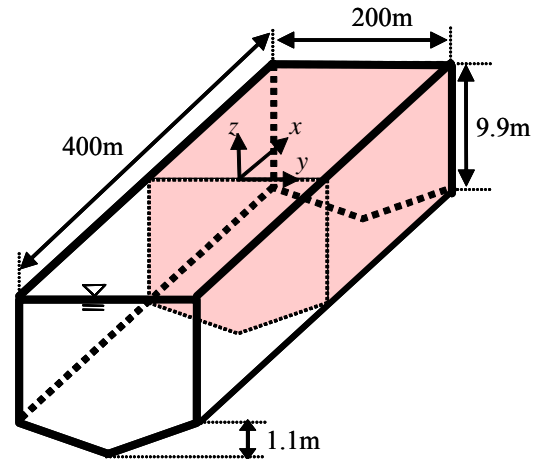


図 - 3 計算領域の設定

三次元計算結果から鉛直二次元計算に必要な補正項 G_c 、 G_s 、 G_ρ (式 (8) 等) を計算し、における鉛直二次元計算で採用する。

このような計算手順となる本モードスプリット法を導入することにより、計算負荷の大きい三次元計算の回数を減らして計算負荷を大幅に削減しつつ、流れや密度の三次元構造の再現が可能となる。なお、このような計算手順となる本モードスプリット法の計算プログラムを、直交曲線・座標系を採用している著者らの三次元河川流モデル (二瓶ら, 2005) に組み込んで、次章に示すテスト計算を実施している。

3. 密度フロントに関するテスト計算

(1) 計算条件

三次元計算と鉛直二次元計算を併用する、という新しいモードスプリット法の計算精度や CPU 時間について調べるために、シンプルな密度流場を想定したテスト計算を実施する。ここでは、基本的な密度フロント現象の一つである Lock Exchange Problem を計算対象とする。この Lock Exchange Problem とは、図 - 3 に示すように、静止容器中に密度の異なる二つの水塊が容器中央部で分け隔てて置かれ、計算開始とともに相対的に低密度の水塊が上層を、高密度の水塊が下層を進行する、という密度フロント現象である。

今回の計算領域は、図 - 3 に示すように、流下 (x) 方向 400m、横断 (y) 方向 200m であり、底面は中央部 ($y=0m$) で窪み形状とする。初期条件として x が正と負の領域に 1005 、 1000kg/m^3 の密度を各々与えている。鉛直二次元場及び三次元場の計算時間間隔 Δt_e 、 Δt_i としては、モードスプリット法を用いる場合 ($\Delta t_i/\Delta t_e = 10, 20, 30, 40, 50, 60$) と reference 計算としてモードスプリット法を用いない場合を設定して、各ケースの計算精

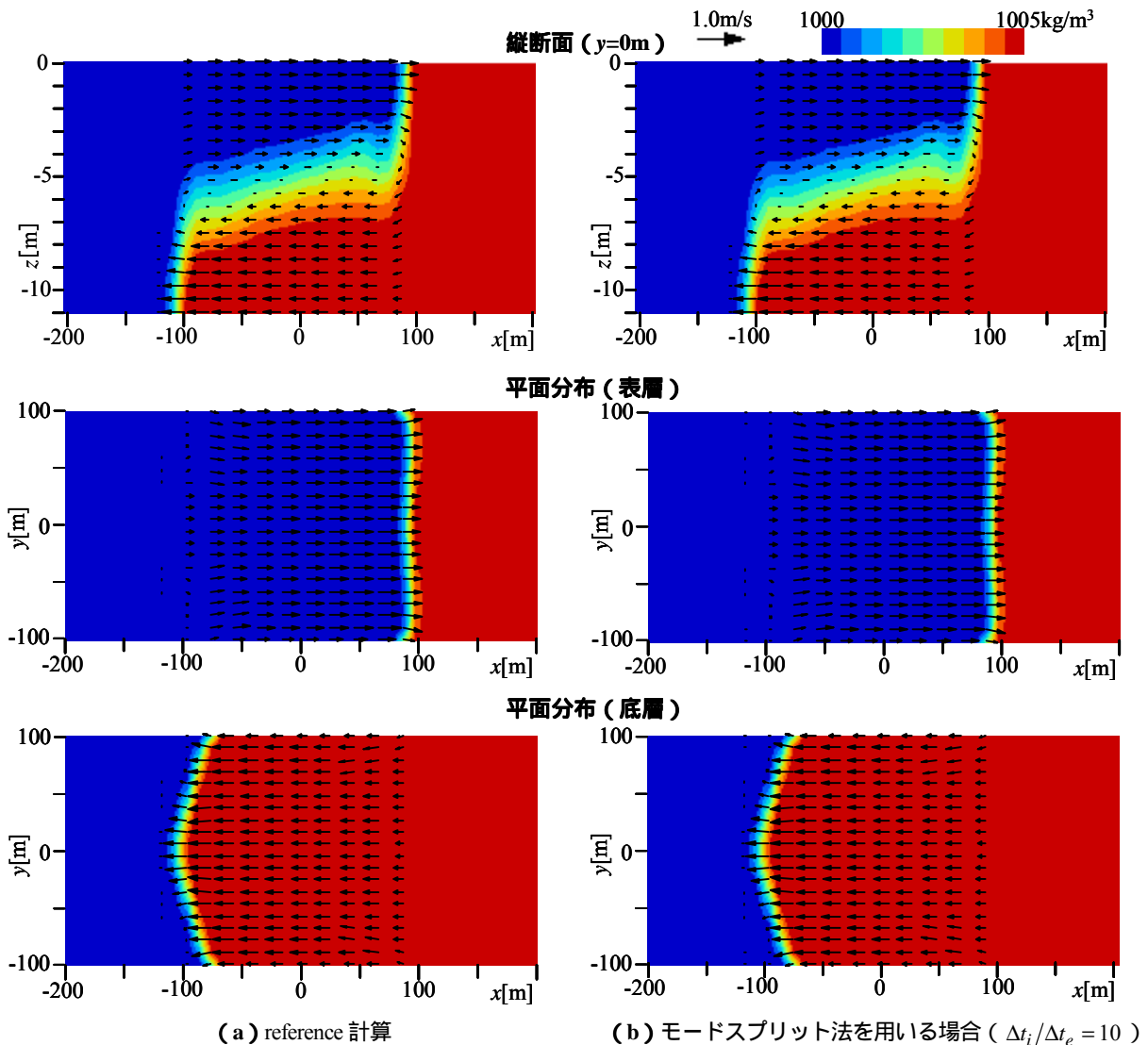


図-4 縦断面及び平面（表・底層）における密度フロントの瞬間像（ $t=360s$ ）

度やCPU時間を求める。

(2) 計算結果

モードスプリット法の有無による計算結果の違いを比較するために、計算開始 360s 後の縦断面 ($y=0m$) と平面（表層、底層）における密度コンターと流速ベクトルを図-4に示す。ここで、モードスプリット法を用いる場合 ($\Delta t_i / \Delta t_e = 10$) とモードスプリット法を用いない reference 計算の結果が各々表示されている。まず、reference 計算の結果を見ると、密度フロントは上層・下層においてそれぞれ x の正と負の方向にそれぞれ進行しており、フロント先端部は鉛直方向に切り立った形状となっている。このような特徴は、既存の Lock Exchange Problem に関する数値計算結果と類似している（二瓶ら、2002）。また、密度フロントの平面構造に関しては、表層では横断方向に概ね一様であるのに対して、底層では窪んでいる中央部において密度フロントの進行が相対的に速くなっている。それに対して、モードスプリット法

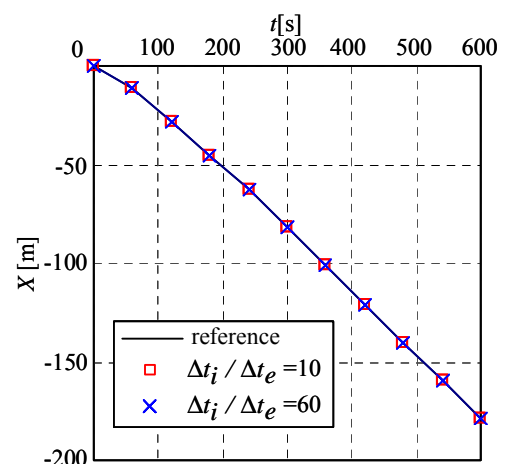


図-5 下層フロント位置 X の時間変化の比較

を用いるケース ($\Delta t_i / \Delta t_e = 10$) の計算結果は、密度フロントの鉛直・平面構造に関する上記の特徴を概ね再現しており、両者の計算結果は概ね一致している。次に、

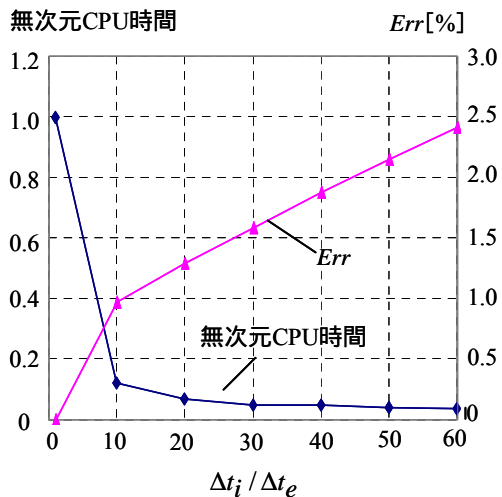


図-6 無次元 CPU 時間と計算誤差 $Err(t=360s)$

下層における密度フロント位置 x の時間変化を図-5 に示す。ここでは、reference 計算とモードスプリット法を用いる場合として $\Delta t_i / \Delta t_e = 10, 60$ における結果を示す。これを見ると、フロント位置に関する3つの計算結果は完全に一致していることが分かる。

新しいモードスプリット法導入に伴う計算精度や CPU 時間の変化をより定量的に検討するために、流速の計算誤差 Err (モードスプリット法を用いるケースと reference 計算結果の差の RMS 値をフロント進行速度で除した値) と無次元 CPU 時間 (各ケースの CPU 時間を reference 計算の値で除した値) を算出した結果を図-6 に示す。ここでは、図-4 と同様に、計算開始 360s 後の結果を示している。この図を見ると、 $\Delta t_i / \Delta t_e$ を大きくすると計算誤差 Err は大きくなるものの、この場合には最大で 2.4% と非常に小さい値である。それに対して、CPU 時間に関しては、 $\Delta t_i / \Delta t_e$ とともに無次元 CPU 時間は減少し、 $\Delta t_i / \Delta t_e = 60$ のときに最小で 0.038 となっている。以上のことから、本モードスプリット法により、計算誤差をほとんど増加させずに計算時間を大幅に短縮させることが可能となっており、本モデルの基本的な有効性が検証された。

4. おわりに

本論文で得られた結論は以下のとおりである。

(1) 沿岸環境モデルとリンクすることを念頭にして、計算負荷を大幅に減らすことが可能な三次元河口流モデルを構築した。その際に、沿岸モデルにおいて「三次元計算」と「平面二次元計算」を併用するモードスプリット法の考え方を応用して、「三次元計算」と「鉛直二次元計算」を組み合わせる新しいモードスプリット法を開発した。また、新しいモードスプリット法に必要となる

鉛直二次元場の運動方程式などの基礎方程式系を定式化した。

(2) 新しいモードスプリット法の基本的な有効性を検証するために、密度フロントに関するテスト計算を行った。ここでの計算条件としては、モードスプリット法を用いない場合と用いる場合 ($\Delta t_i / \Delta t_e = 10 \sim 60$) とした。その結果、本モードスプリット法導入により、計算誤差を抑制したまま、CPU 時間を大幅に短縮することが可能となっており、本モードスプリット法の基本的な有効性が示された。

なお、本論文では、基本的な密度場の計算例しか示していないが、現地の河口流シミュレーションに対して本モデルを適用し、本モデルの有効性を幅広く検討することは必要不可欠であり、今後の課題とする。

参考文献

- 安達貴浩・衛門久明・橋本彰博・高橋大吉 (2002): 那珂川河口域における塩水侵入の現地観測ならびに数値シミュレーション, 河川技術論文集, Vol.8, pp.489-494.
- 鈴木伴征・石川忠晴 (1999): 利根川河口堰下流部における貧酸素水塊の発達・流動に関する現地観測と数値計算, 水工学論文集, Vol.43, pp.881-886.
- 田中昌宏 (2001): 内湾の生態系シミュレーション, ながれ, Vol.20, No.5, pp.354-364.
- 土木学会 (1999): 水理公式集 [平成 11 年度版], 丸善, pp.187-191.
- 二瓶泰雄・山崎裕介・西村司・灘岡和夫 (2002): 浅水流場を対象とした三次元数値モデルの近似手法に関する検討 ~ σ 座標系と静水圧近似に着目して~, 海岸工学論文集, Vol.49, No.1, pp.411-415.
- 二瓶泰雄・加藤祐一・佐藤慶太 (2005): 広域河川流計算のための新たな三次元流動モデルの開発と洪水流計算への応用, 土木学会論文集, No.803 / -73, pp.115-131.
- Blumberg, A. F. & Mellor, G. L. (1983): Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight, *J. Geophys. Res.*, Vol.88, No.C8, pp.4579-4592.
- Madala, R. V. & Piacsek, S. A. (1977): A semi-implicit numerical model for baroclinic oceans, *J. Comp. Phys.*, Vol.23, pp.167-178.
- Mellor, G. L. & A. F. Blumberg (1985): Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system, *Monthly Weather Review*, Vol.113, pp.1379-1383.
- Phillips, N. A. (1957): A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *J. Meteor.*, Vol.14, pp.184-185.
- Stelling, G. S. & J. A. TH. M. Van Kester (1994): On the approximation of horizontal gradients in sigma co-ordinates for bathymetry with steep bottom slopes, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.18, pp.915-935.