

簡易境界適合座標系に基づく河川流モデルの提案

山崎裕介¹・二瓶泰雄²

¹正会員 ㈱建設技術研究所 東京本社河川部 (〒330-0071 埼玉県さいたま市浦和区上木崎1-14-6)

E-mail: yamasaki-yuusuke@ctie.co.jp

²正会員 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

E-mail: nihei@rs.noda.tus.ac.jp

河川流計算で用いる水平座標系として、デカルト座標系や直交曲線座標系のような数値モデル上の簡便さを有しつつ、一般座標系と同程度の計算精度を兼ね備えた簡易境界適合座標系(水平 σ 座標系)を新たに提案した。この水平 σ 座標系とは、鉛直座標系として気象・海洋計算に用いられる一種の境界適合座標系である σ 座標系を、河川流計算における水平座標系に応用するものである。水平 σ 座標系に基づく河川流モデルの基本的な有効性を調べるために、本モデルを直線開水路流れや実河川流場へ適用し、他の水平座標系と計算精度や計算負荷を比較・検討した。その結果、水平 σ 座標系は一般座標系と比べて計算精度に大差なく、その上、デカルト座標系と同程度の低計算負荷を保つことが示された。

Key Words: boundary-fitted coordinate, horizontal sigma coordinate, numerical simulation, river flow

1. 序論

近年の数値水理学は、計算機能力の大幅な向上や様々な数値解析手法の開発に伴って大きく進展しつつある。このうち河川流計算に関しては、従来的一次元解析のみならず、平面二次元解析や三次元解析が幅広く行われている^{1)・2)}。通常、河道の平面形は湾曲・蛇行し、また、川幅の急拡・急縮部が存在するため、河川の平面形状は複雑に変化している。そのため、河川流計算では、どのような水平座標系を選択するか、ということが、計算精度や負荷に対して大きな影響を及ぼすものと考えられる。

河川流計算で用いられている主な水平座標系としては、矩形格子に基づくデカルト座標系や一種の円筒座標系である直交曲線座標系、また、境界適合格子を採用している一般座標系、という3つが挙げられる。このうち、デカルト座標系に関しては、河道平面形が蛇行・湾曲する場合には、河道形状を階段状に表すことになり、また、計算に用いられない無駄な格子が生じるために、その適用例の多くは直線的な開水路流れである^{3)~5)}。また、直交曲線座標系では、河道中心線に沿う方向(s 軸)とその s 軸に直交する横断方向(n 軸)に座標系を定義しており、河道中心線に沿う形で計算格子を配置できるため、これまでに湾曲・蛇行部を含む河川流計算に適用されている^{6)~8)}。しかしながら、この座標系では、

流下方向に川幅が変化するような場合には、デカルト座標系と同様に、河道形状を階段状に表現することとなる。一方、境界適合格子に基づく一般座標系は、河道形状に沿う形で格子を配置することが可能であるため、数多くの河川流解析に適用され、その計算精度が検証されている^{9)~12)}。しかしながら、一般座標系は、デカルト座標系や直交曲線座標系と比べて基礎方程式系やその計算コードが煩雑になる、という問題点を含んでいる^{13)・14)}。

そこで本研究では、デカルト座標系や直交曲線座標系のような数値モデル上の簡便さを有しつつ、一般座標系のように河道形状を忠実に表現し得る水平座標系を新たに提案する。ここでは、一種の境界適合格子であり、鉛直座標系として用いられている σ 座標系^{15)~17)}を、水平座標系に応用することを試みる。この σ 座標系は、水表面や底面の形状を簡便かつ合理的に取り扱うことが可能な座標系であり、複雑に変化する河道形状を記述するための水平座標系にも十分適用し得るものと期待できる。以下では、本論文で提案する水平座標系を**水平 σ 座標系**と称し、これまで鉛直座標系として用いられてきた σ 座標系を**鉛直 σ 座標系**と呼ぶこととする。本論文の具体的な内容としては、1) 水平 σ 座標系の基本的な概念や基礎方程式系を示し、2) いくつかの検証計算を通して、水平 σ 座標系の有効性を検証する。

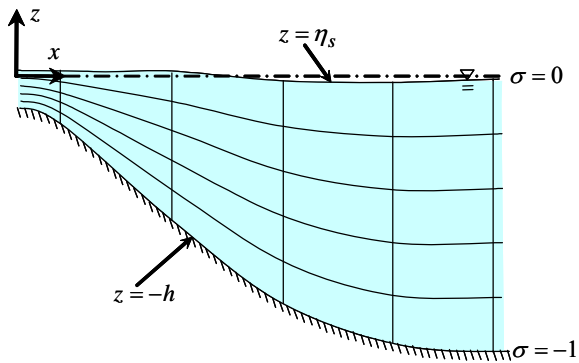


図-1 鉛直 σ 座標系の定義 (海洋計算の場合)

2. 水平 σ 座標系の概要

(1) 基本概念

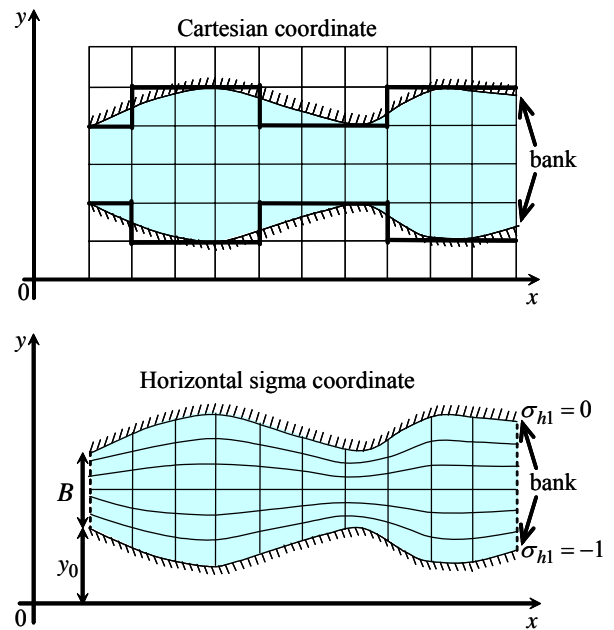
これまでに多くの気象・海洋計算に適用されている鉛直 σ 座標系では、例えば、海水流動場に対しては、図-1に示すように、水平方向に変化する水表面と底面に沿って計算格子を設定する。座標系の定義としては、以下に示すように、デカルト座標系における x, y, z 座標から鉛直 σ 座標系の x^*, y^*, σ 座標に変換される。

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad \sigma = \frac{z - \eta_s}{H} \quad (1)$$

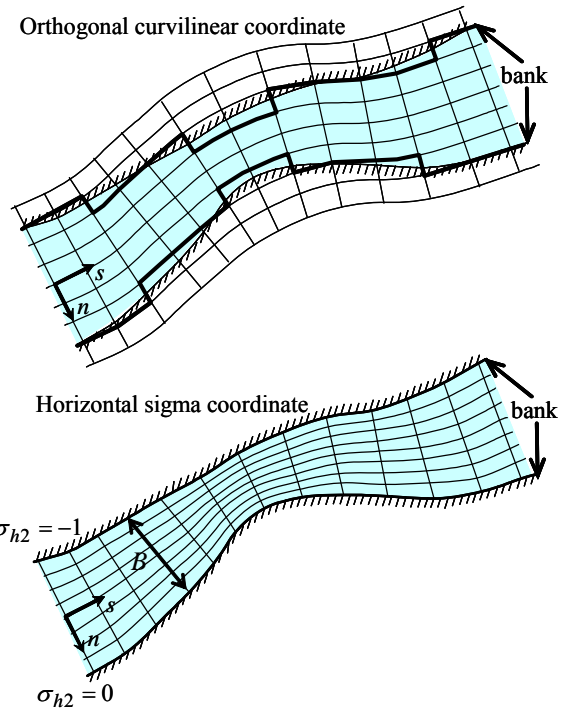
ここで、 H : 全水深 ($= \eta_s + h$)、 η_s : 水位、 h : 水深である。このように定義される σ 座標系では、一般座標系の場合と異なり、座標変換後の基礎方程式系がデカルト座標系の式系と比べて大きく変化しないことから¹⁶⁾、鉛直 σ 座標系は複雑に変化する境界形状を数値計算上簡便かつ合理的に表現し得る座標系であるといえる。

このように鉛直座標系として用いられている σ 座標系のコンセプトを、本研究では水平座標系に応用する。すなわち、鉛直 σ 座標系では、水表面や底面形状に沿う形で計算格子が定義されているのに対して、水平 σ 座標系では、河道部の両側岸を忠実に表現するように計算格子が定義される。水平 σ 座標系における実際の計算格子配置の例を図-2に示す。

図中には、比較のために、デカルト座標系や直交曲線座標系における計算格子も図示している。川幅が変化する直線開水路 (同図 (a)) や湾曲水路 (同図 (b)) においては、デカルト座標系や直交曲線座標系では境界形状が階段状に表現されてしまうのに対して、水平 σ 座標系では河道形状に沿うように計算



(a) デカルト座標系から変換する場合



(b) 直交曲線座標系から座標変換する場合

図-2 水平 σ 座標系の定義 (図中の太線は、デカルト座標系 (a) と直交曲線座標系 (b) における河道形状を示す)

格子が配置され、同一格子数でも格子解像度を細かく設定し得ることが分かる。このように、水平 σ 座標系は、鉛直 σ 座標系の利点を生かして、境界適合格子を採用し得る簡便な水平座標系となり得るものと考えられる。以下では、水平 σ 座標系として、デカルト座標系及び直交曲線座標系から座標変換したのものについて、それぞれの座標系の定義や基礎方程

式系を示す.

(2) 座標系及び流速の定義

a) デカルト座標系から変換する場合

デカルト座標系から水平 σ 座標系へ変換する場合、水平 σ 座標系 (x^*, σ_{h1}) はデカルト座標系 (x, y) を用いて以下のように定義される.

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ \sigma_{h1} &= \frac{y - y_0 - B}{B} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで y_0 と B は、**図-2(a)**に示すように、それぞれ、基準線(x 軸)からの距離と川幅を表している. 上式のように定義される σ_{h1} の範囲は、鉛直 σ 座標系¹⁶⁾と同様に、-1から0までとなる. 次に、流速に関しては、デカルト座標系における x, y 方向流速 u, v は、以下に示すように、水平 σ 座標系における x^*, σ_{h1} 方向流速 u^*, v^* に変換される.

$$\begin{aligned} u^* &= u \\ v^* &= v + Bu^* \frac{\partial \sigma_{h1}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

また、基礎方程式系をデカルト座標系から水平 σ 座標系に座標変換する際に必要な空間微分項について示す. 任意の変数 ϕ に関する x, y 方向の空間微分項は、以下のような形に変換される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^*} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{h1}} \frac{\partial \sigma_{h1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{h1}} \end{aligned} \quad (4)$$

b) 直交曲線座標系から変換する場合

次に、直交曲線座標系における s, n 座標から水平 σ 座標系における s^*, σ_{h2} 座標へ変換する. その際には、**図-2(b)**に示すように、デカルト座標系の場合と同じく川幅を B とすると、 s^*, σ_{h2} は以下のように表される.

$$\begin{aligned} s^* &= s \\ \sigma_{h2} &= \frac{n - B/2}{B} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 σ_{h2} の範囲も、 σ_{h1} と同様に、-1から0となる. 式(5)のように定義される水平 σ 座標系における s^*, σ_{h2} 方向流速 U_s^*, U_n^* は、直交曲線座標系の s, n 方向流速 U_s, U_n を用いると次のように表される.

$$\begin{aligned} U_s^* &= U_s \\ U_n^* &= U_n + B \frac{U_s^*}{1+N} \frac{\partial \sigma_{h2}}{\partial s} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $N = n/R$ ($R : s^*$ 方向座標の曲率)である. また、任意の変数 ϕ に関する s, n 方向の空間微分項は、式(4)と同様に、次のように記述される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \frac{\partial \phi}{\partial s^*} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{h2}} \frac{\partial \sigma_{h2}}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{h2}} \end{aligned} \quad (7)$$

(3) 基礎方程式系の導出

a) デカルト座標系から変換する場合

前節に示された座標系や流速の定義に基づいて、水平 σ 座標系の基礎方程式系を導出する. ここでは、平面二次元場における連続式と運動方程式より構成される浅水流モデルについて、デカルト座標系から水平 σ 座標系に変換する. まず、デカルト座標系における連続式と x, y 方向運動方程式は、以下のようになる.

・連続式

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) = 0 \quad (8a)$$

・運動方程式 (x 方向)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = -g \frac{\partial(H + z_b)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) u \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (8b)$$

・運動方程式 (y 方向)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = -g \frac{\partial(H + z_b)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) v \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (8c)$$

ここで、 z_b は河床高さであり、また、 A_H は水平渦動粘性係数であり、本論文では最も一般的な0方程式モデルに基づいて A_H を与える.

$$A_H = \frac{\kappa}{6} U_* H \quad (9)$$

ここで、 κ はカルマン定数 (=0.40) , U_* は摩擦速度である. 式 (8b) 及び (8c) の運動方程式における右辺第4項は、底面摩擦項と植生抵抗項の和であり、 C_f は底面摩擦係数、 a は植生密度パラメータ、 C_b は植生の抗力係数をそれぞれ示す. このうち、底面摩擦係数 C_f は、マンギングの粗度係数 n_m を用いて、以下のように与えられる.

$$C_f = \frac{gn_m^2}{H^{1/3}} \quad (10)$$

式(8)に示されるデカルト座標系における浅水流モデルを、式 (2) ~ (4) を用いて水平 σ 座標系に座標変換する. 最終的に得られた連続式と運動方程式は、以下に示すとおりである.

・連続式

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x^*} (Hu^*B) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \sigma_{hl}} (Hv^*) = 0 \quad (11a)$$

・運動方程式 (x^* 方向)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v^*}{B} \frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{hl}} \\ &= -g \left[\frac{\partial(H+z_b)}{\partial x^*} + \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \sigma_{hl}} \frac{\partial \sigma_{hl}}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(A_H \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{hl}} \left(A_H \frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{hl}} \right) \\ & - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) u^* \sqrt{u^{*2} + v^2} \end{aligned} \quad (11b)$$

・運動方程式 (σ_{hl} 方向)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u^* \frac{\partial v}{\partial x^*} + \frac{v^*}{B} \frac{\partial v}{\partial \sigma_{hl}} \\ &= -g \frac{1}{B} \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \sigma_{hl}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(A_H \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{hl}} \left(A_H \frac{\partial v^*}{\partial \sigma_{hl}} \right) \\ & - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) v \sqrt{u^{*2} + v^2} \end{aligned} \quad (11c)$$

なお、運動方程式中の移流項や底面摩擦項には、デカルト座標系における y 方向速度 v を含んでいることに注意されたい. また、水平拡散項の扱いに関しては、鉛直 σ 座標系では、通常、高次の項を無視す

ることが多い¹⁶⁾. そこで、本研究で提案する水平 σ 座標系においても高次項を無視した形としている.

b) 直交曲線座標系から変換する場合

次に、直交曲線座標系に基づく浅水流モデルから水平 σ 座標系へ変換した結果を示す. 直交曲線座標系における連続式及び s, n 方向運動方程式は、以下のとおりである.

・連続式

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s} (HU_s) + \frac{\partial}{\partial n} (HU_n) + \frac{HU_n}{(1+N)R} = 0 \quad (12a)$$

・運動方程式 (s 方向)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_s}{\partial t} + \frac{U_s}{1+N} \frac{\partial U_s}{\partial s} + U_n \frac{\partial U_s}{\partial n} + \frac{U_s U_n}{(1+N)R} \\ &= -\frac{g}{1+N} \frac{\partial(H+z_b)}{\partial s} \\ & + \frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_H}{1+N} \frac{\partial U_s}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(A_H \frac{\partial U_s}{\partial n} \right) \\ & - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) U_s \sqrt{U_s^2 + U_n^2} \end{aligned} \quad (12b)$$

・運動方程式 (n 方向)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{U_s}{1+N} \frac{\partial U_n}{\partial s} + U_n \frac{\partial U_n}{\partial n} - \frac{U_s^2}{(1+N)R} \\ &= -g \frac{\partial(H+z_b)}{\partial n} \\ & + \frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_H}{1+N} \frac{\partial U_n}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(A_H \frac{\partial U_n}{\partial n} \right) \\ & - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) U_n \sqrt{U_s^2 + U_n^2} \end{aligned} \quad (12c)$$

上式のように記述される直交曲線座標系における連続式と運動方程式を、式 (5) ~ (7) に定義される水平 σ 座標系へ変換した結果を以下に示す. なお、運動方程式における水平拡散項の高次項に関しては、デカルト座標系から変換する場合 (式 (11)) と同様に省略する.

・連続式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{(1+N)B} \frac{\partial}{\partial s^*} (HU_s^*B) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \sigma_{h2}} (HU_n^*) \\ & + \frac{HU_n}{(1+N)R} = 0 \end{aligned} \quad (13a)$$

・運動方程式 (s^* 方向)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_s^*}{\partial t} + \frac{U_s^*}{1+N} \frac{\partial U_s^*}{\partial s^*} + \frac{U_n^*}{B} \frac{\partial U_s^*}{\partial \sigma_{h2}} + \frac{U_s^* U_n^*}{(1+N)R} \\
&= -\frac{g}{1+N} \left[\frac{\partial(H+z_b)}{\partial s^*} + \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \sigma_{h2}} \frac{\partial \sigma_{h2}}{\partial s} \right] \\
&+ \frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s^*} \left(\frac{A_H}{1+N} \frac{\partial U_s^*}{\partial s^*} \right) \\
&+ \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{h2}} \left(A_H \frac{\partial U_s^*}{\partial \sigma_{h2}} \right) \\
&- \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) U_s^* \sqrt{U_s^{*2} + U_n^2}
\end{aligned} \tag{13b}$$

・運動方程式 (σ_{h2} 方向)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{U_s^*}{1+N} \frac{\partial U_n}{\partial s^*} + \frac{U_n^*}{B} \frac{\partial U_n}{\partial \sigma_{h2}} - \frac{U_s^{*2}}{(1+N)R} \\
&= -\frac{g}{B} \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \sigma_{h2}} \\
&+ \frac{1}{1+N} \frac{\partial}{\partial s^*} \left(\frac{A_H}{1+N} \frac{\partial U_n^*}{\partial s^*} \right) \\
&+ \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{h2}} \left(A_H \frac{\partial U_n^*}{\partial \sigma_{h2}} \right) \\
&- \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) U_n \sqrt{U_s^{*2} + U_n^2}
\end{aligned} \tag{13c}$$

なお、上式における連続式及び運動方程式中の移流項や底面摩擦項に関しても、直交曲線座標系の n 方向速度 U_n が含まれている。

水平 σ 座標系に基づく基礎方程式系を、デカルト座標系や直交曲線座標系における式系と比べると、水平 σ 座標系では、運動方程式中 (式 (11b), (13b)) の水位勾配項の数が 1 つ増えるのみで、他には項数や式形は変化していない。このことより、鉛直座標系として用いられている σ 座標系と同様に、水平 σ 座標系においても基礎式系が座標変換前の場合と大きく異なっていないことが分かる。一方、一般座標系の基礎方程式系は、**付録** に示しているように、デカルト座標系や直交曲線座標系の場合よりも煩雑である。以上のことをまとめると、本論文で提案されている水平 σ 座標系は、①複雑な河道形状を忠実に表現することが可能であり、②基礎方程式系やその数値コードが一般座標系の場合と比べて簡単となる、という利点を有していることが分かる。

(4) 数値解法

水平 σ 座標系における連続式と運動方程式に対す

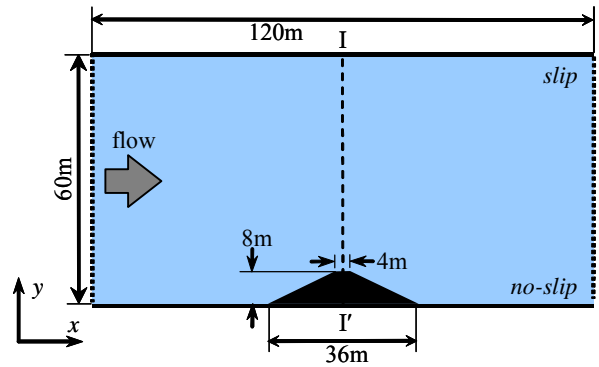


図-3 計算領域 (直線開水路流れ)

表-1 計算条件 (直線開水路流れ, 表中の I_{max} , J_{max} は流下・横断方向の格子数である)

Case	$I_{max} \times J_{max}$
1	120 × 120
2	120 × 60
3	120 × 30
4	60 × 120
5	60 × 60
6	60 × 30
7	30 × 120
8	30 × 60
9	30 × 30

る数値解法として、ここでは差分法を適用する。各変数の配置に関しては、スタッガードメッシュ系を採用する。空間差分スキームについては、移流項は三次精度風上差分、その他の項は二次精度中央差分を用いる。また、時間差分スキームに関しては、移流項は半陰解法として、残りは完全陰解法とする。なお、数値計算の安定性を高めるために、連続式と運動方程式を同時収束させることとし、その際にはSOR法を適用する。

3. 直線開水路流れにおけるテスト計算

(1) 計算条件

水平 σ 座標系に基づく河川流モデルの基本的な計算精度を検証するために、デカルト座標系から変換された水平 σ 座標系を用いて、川幅の変化する直線開水路の定常流に対する数値シミュレーションを行う。具体的には、**図-3** に示すように、流下方向 120m、横断方向 60m という平面二次元場の計算領域とし、領域中央に狭窄部を設けて川幅を変化させている。水深 h は全領域で 0.3m と一定とし、また、河床勾配は 1/10000 とする。マンニングの粗度係数に関しては $n_m = 0.016 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ と与え、水路内には植生はないものとする。境界条件としては、右岸境界では no-slip 条

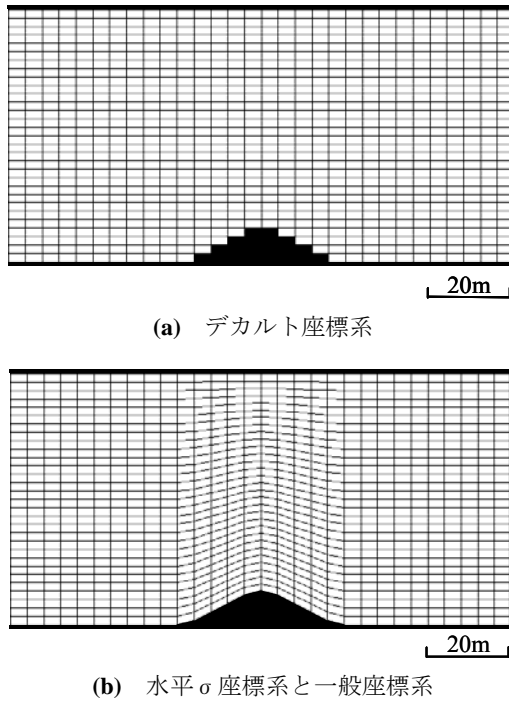


図-4 計算格子配置の一例 (Case9: 格子数 30×30)

件, 左岸境界では slip 条件を課し, 上・下流端では開放条件 (境界に対して垂直方向の空間勾配値を 0) とする. 初期条件については, 全領域において, 流速・水位ともに 0 とする.

水平 σ 座標系の計算精度を他の手法と比較・検討するために, ここで用いる水平座標系としては, 水平 σ 座標系に加えて, デカルト座標系と一般座標系とする. なお, ここでの一般座標系の計算は付録に示された基礎式を用いて行われている. これらの水平座標系の計算精度は格子解像度に大きく依存するものと考えられるので, ここでは, 表-1 に示すように, 合計 9 ケースの格子条件を設定しており, 流下, 横断方向ともに格子数を 30, 60, 120 と変化させている. 図-4 は, 各座標系における計算格子配置例として, Case9 (30×30) の場合を示している. これより, 前述しているように, デカルト座標系の場合には, 川幅が変化する狭窄部にて河岸部が階段状になり, 狭窄部にて計算を行わない無駄な「陸域」メッシュが存在している. それに対して, 今回, 同一の格子配置を用いる水平 σ 座標系や一般座標系では, 川幅の変化する河道境界を忠実に表している.

後述するように, 各座標系の計算精度を定量的に評価するために, 計算格子解像度が最も細かい Case1 における一般座標系の計算結果を正解と見なし (以下, この計算を *reference* 計算と呼ぶ), この結果と各座標系の計算結果を比較する. 具体的には, 以下のようなある横断面での誤差値 *Err* を指標として, 計算精度を定量化する.

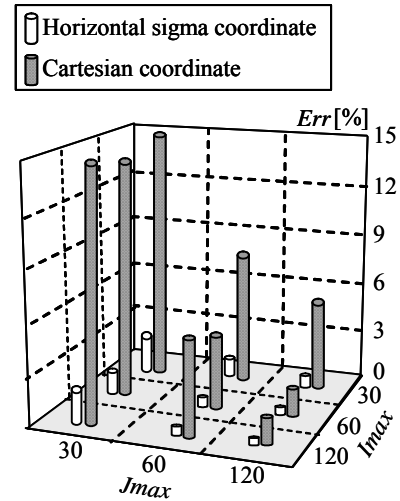


図-5 直線開水路流れのテスト計算における水平 σ 座標系とデカルト座標系の誤差値 *Err*

$$Err = \frac{1}{J_{max}} \frac{\sum_{j=1}^{J_{max}} |U_c - U_{ref}|}{U_{ave}} \times 100 \quad (14)$$

ここで, J_{max} は横断 (j) 方向格子数, U_c はデカルト座標系もしくは水平 σ 座標系における主流方向流速の計算結果, U_{ref} は *reference* 計算 (一般座標系, Case1) における主流方向流速値, U_{ave} は流入部での断面平均流速 (=0.276m/s) である. この *Err* は横断方向平均された流速誤差値を断面平均流速 U_{ave} で無次元化したものである. なお, デカルト座標系の格子位置は, 図-4 に示すように, 狭窄部において一般座標系の格子位置とは異なっている. このため, デカルト座標系における計算結果を一般座標系の格子位置に空間内挿し, その結果と *reference* 計算結果から *Err* を評価する.

(2) 計算結果

水平 σ 座標系の計算精度を定量的に比較・検討するために, 定常状態と見なされた数値解を *reference* 計算結果と比較し, そこから得られた各計算ケースの誤差値 *Err* の結果を図-5 に示す. ここでの *Err* は, 狭窄部中央 (図-3 中の I-I' 断面) における計算結果であり, デカルト座標系と水平 σ 座標系の主流方向流速を *reference* 計算結果と比較している. これを見ると, まず, 水平 σ 座標系の誤差値 *Err* は 0.4~2.2% の範囲にあるのに対して, デカルト座標系では *Err* は 1.7~14.1% となっている. 同一条件で比べると, 水平 σ 座標系の *Err* はデカルト座標系における結果の 0.10~0.28 倍程度の大きさである. このことより, デカルト座標系から水平 σ 座標系に変換することにより, デカルト座標系における計算誤差

表-2 水平 σ 座標系と一般座標系における無次元 CPU 時間 (直線開水路流れ, 各ケースの結果をデカルト座標系における結果で無次元化している)

Case	Generalized coordinate	Horizontal sigma coordinate
1	1.98	1.16
2	1.98	1.17
3	1.96	1.15
4	1.83	1.16
5	1.59	1.19
6	1.80	1.16
7	1.70	1.19
8	1.64	1.14
9	1.68	1.10

が 72~90%減少しているといえる. 狭窄部における他の横断面においても, デカルト座標系と水平 σ 座標系の計算結果を比べたところ, 概ね, 狭窄部中央の結果と類似する傾向が確認されている. なお, 一般座標系と水平 σ 座標系では, 同一の計算格子を用いているものの計算結果は一致していない. これは, 両者の基礎方程式が完全に同じではないためであり, 運動方程式における水平拡散項よりも移流項の取り扱いの違いが計算結果に大きな影響を及ぼしている.

次に, 格子解像度の違いが計算精度に及ぼす影響を見るために, 例えば, 流下方向格子数 I_{max} を同一とし, 横断方向格子数 J_{max} が異なるケースとして Case1 と Case3 の誤差値 Err を比較する. Case3 の Err と Case1 の Err の比としては, デカルト座標系では 8.3, 水平 σ 座標系では 4.4 となり, 格子解像度が粗くなると両座標系ともに Err は大きくなるものの, その増加率はデカルト座標系の方が大きい. 一方, 横断方向格子数 J_{max} を同一とし, 流下方向格子数 I_{max} が異なる場合の比較として, Case7 と Case1 の誤差値 Err の比は, デカルト座標系では 3.0, 水平 σ 座標系では 2.1 となり, ここでもデカルト座標系の増加率の方が大きいことが分かる. 以上のことより, 水平 σ 座標系における誤差値 Err の方がデカルト座標系の値よりも明確に小さく, また, 格子解像度が粗くなるとともに, 両者の誤差値の差が大きくなることが示された.

水平 σ 座標系の計算効率性について定量的に把握するために, 水平 σ 座標系と一般座標系において要した CPU 時間を表-2 に示す. ここでは, 各々の座標系における CPU 時間をデカルト座標系の CPU 時間で無次元化した結果を表示している. この表より, 水平 σ 座標系では, 無次元 CPU 時間は 1.10~1.19 であり, デカルト座標系の CPU 時間と比べてほとんど増加していない. 一方, 一般座標系の無次元 CPU

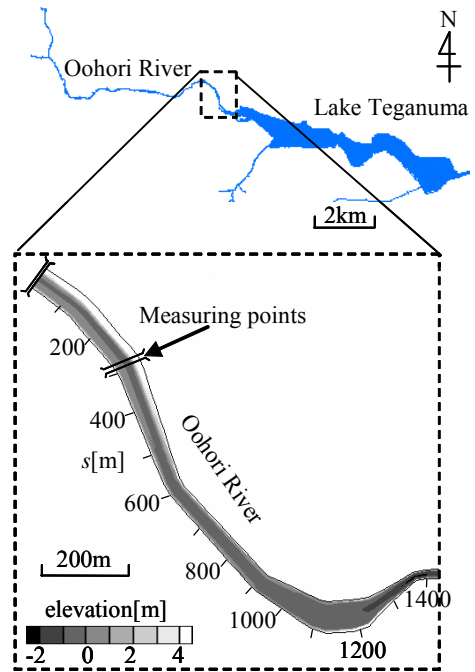


図-6 計算領域と地盤高さ分布 (実河川流計算, s : 計算領域上流端からの距離)

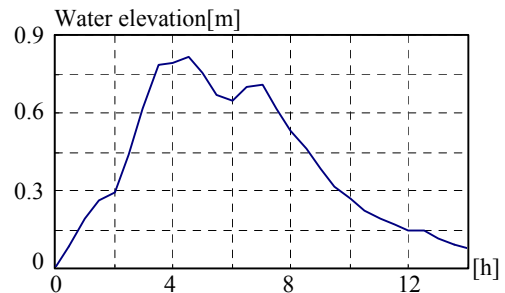


図-7 洪水イベント時における水位変動 (計算領域上流端, 2004/5/21)

時間は, 1.59~1.98 であり, 全 9 ケースの平均値は 1.80 である. このように, 水平 σ 座標系の計算負荷は, デカルト座標系と同程度であり, かつ, 一般座標系よりも小さいことが分かる. 上述した直線開水路流れの計算結果をまとめると, 水平 σ 座標系は, 一般座標系と比べて計算精度に大差なく, その上, デカルト座標系と同程度の低計算負荷を保っていることが明らかとなった.

4. 実河川流計算への適用

(1) 計算条件

水平 σ 座標系を導入した河川流モデルの現地河川流計算への適用性を検証するために, 富栄養化湖沼として有名な千葉県手賀沼における主要流入河川の

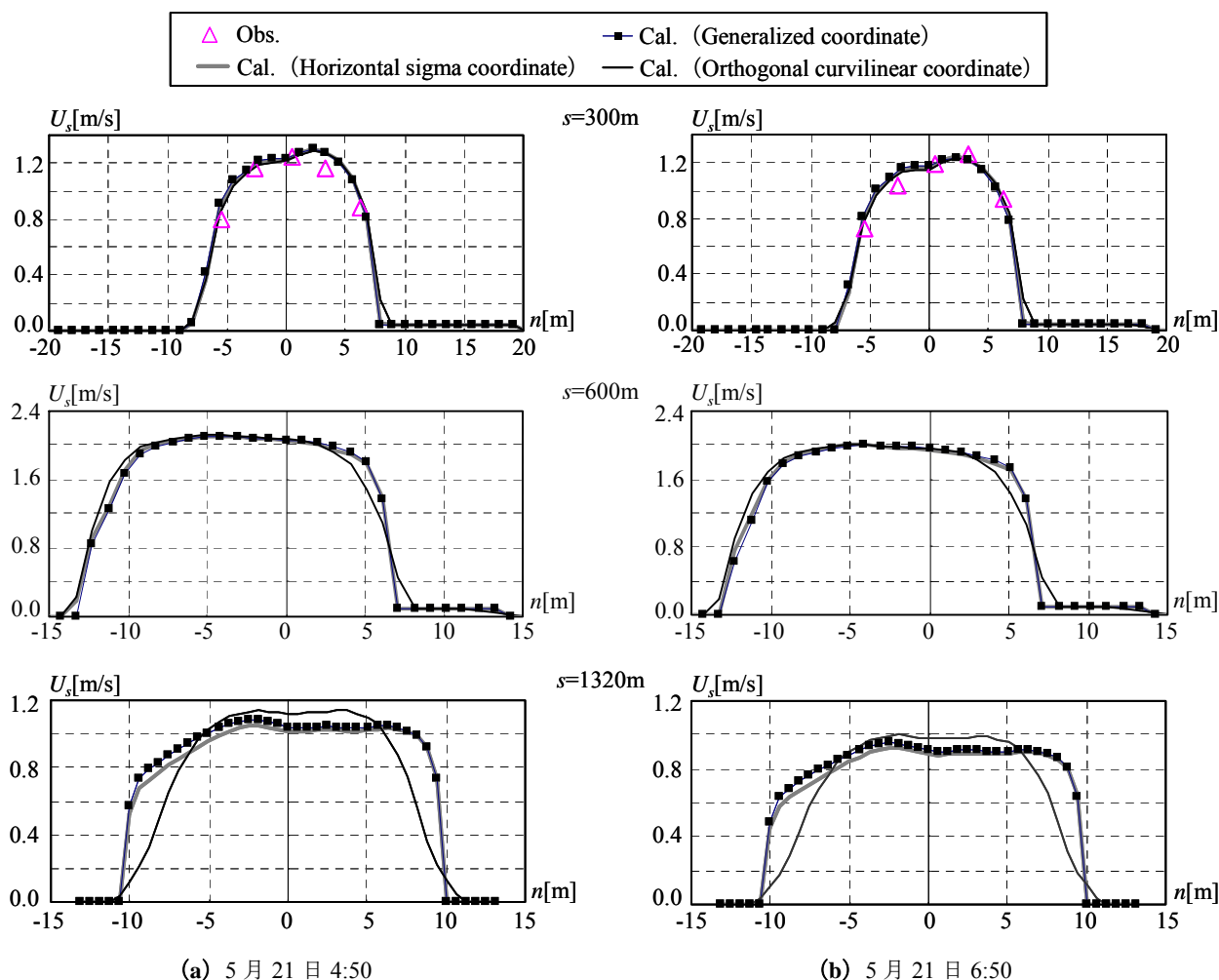


図-8 主流方向流速 U_s の横断分布 (n : 河道中心軸からの横断方向距離 (右岸向きを正とする))

一つである大堀川を対象として、平面二次元場の洪水流計算を実施する。図-6は、計算対象領域である大堀川における下流区間1440mの位置と地盤高さ分布を示している。計算期間としては、台風0402号の接近に伴って生じた洪水イベントを含む期間(2004/5/21 0:00~14:00)とする。図-7は、この洪水イベント時における計算領域上流端での水位変動(洪水イベント開始時の水位を0mとする)を示している。このイベント時には、約4時間で水位が0.8m上昇している。この洪水時には、 $s=300\text{m}$ (s : 計算領域上流端からの距離)における横断面内の5地点にて表層流速観測を行い、後述する計算結果と比較する。この流速計測には河川用電磁流速計(AEM1-D, アレック電子(株)製)を用いている。なお、マニングの粗度係数と植生抵抗項中のパラメータに関しては、流速の観測値との比較により、 $n_m = 0.018 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ 、 $aC_b/2 = 1.93 \text{ m}^{-1}$ として与える。

境界条件としては、両側岸部ではno-slip条件とする。また、上・下流端においては、水位については観測値を与えて、流速に関しては開放条件を課している。初期条件については、水位・流速ともに、全

領域において0としている。

ここで用いる水平座標系としては、直交曲線座標系から座標変換された水平 σ 座標系(式(13))に加えて、一般座標系と直交曲線座標系とする。実河川流計算においても、3.と同様に、水平 σ 座標系と一般座標系では同一の境界適合格子を採用しており、計算領域の横断方向幅は22.5m~86mと設定されている。それに対して、直交曲線座標系では、最大川幅に合わせるために、領域内の横断方向幅を86mと一定としている。計算格子数は全座標系ともに主流方向48×横断方向43であり、計算格子幅に関しては、一般座標系と水平 σ 座標系では主流方向30m×横断方向0.5~2.0mであり、直交曲線座標系では、主流方向30m×横断方向2.0mである。

(2) 計算結果

a) 水深平均流速の横断分布

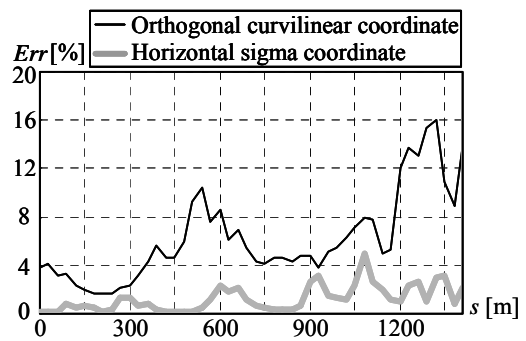
3つの水平座標系における計算結果を比較するために、主流方向水深平均流速 U_s の横断分布を図-8に示す。ここでは、5月21日4:50と6:50における3つの横断面($s=300\text{m}$, 600m , 1320m)での結果に

ついて比較している。また、前述したように、 $s=300\text{m}$ の横断面に関する図中には、現地観測結果により得られた主流方向の水深平均流速値も図示されている。なお、現地調査より計測された表層流速値を水深平均流速値に変換する際には、水深や川幅により変化する更正係数(=平均流速/表層流速)¹⁸⁾を用いる必要がある。ここでは、同時かつ同一河川にて、高解像度超音波ドップラー流速分布計(WorkHorse ADCP Sentinel 1200kHz, RD社製)により計測された流速鉛直分布データを整理したところ、更正係数の平均値が0.88となったので、ここでは更正係数を0.88として水深平均流速の観測値を得ている。

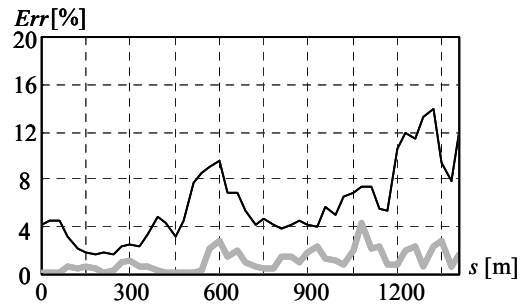
まず、最も上流側に位置する $s=300\text{m}$ における流速横断分布を見ると、3つの水平座標系における計算結果にはほとんど差異が見られず。また、これらの計算結果は現地観測結果と概ね一致していることが分かる。それに対して、残りの2つの断面($s=600\text{m}$, 1320m)においては、 $s=300\text{m}$ における結果と大きく異なっている。具体的には、水平 σ 座標系における流速分布の計算結果は、一般座標系における計算値と概ね良好に一致している。それに対して、直交曲線座標系と一般座標系に基づく計算結果には明確な差が生じており、この傾向は $s=1320\text{m}$ における結果の方が顕著である。これらの3つの水平座標系における計算結果の関係は、2つの時点において類似している。図-6より河道形状の変化を見ると、 $s=300\text{m}$ 付近では川幅は流下方向にほぼ一様であるのに対して、 $s=600\text{m}$, 1320m 付近では川幅は流下方向に変化している。これより、川幅の変化していない $s=300\text{m}$ の横断面では、3つの水平座標系における計算結果は概ね一致しているものの、川幅変化が顕著である $s=600\text{m}$, 1320m では、直交曲線座標系における計算結果は一般座標系や水平 σ 座標系の結果と明確な差が生じることが分かる。

b) 誤差値 Err の時間的・空間的变化

3つの水平座標系における計算誤差の時間的・空間的变化の様子を定量的に把握するために、3.と同様に、式(14)で定義される誤差値 Err を求める。ここでは、一般座標系における主流方向流速の計算結果を正解とし、その結果と直交曲線座標系及び水平 σ 座標系における計算結果を比較・検討する。なお、誤差値 Err を求める際には、冠水メッシュにおける計算結果のみを対象とし、また、無次元化する際に必要な断面平均流速 U_{ave} は計算領域上流端での値を用いる。計算領域内の全断面において算出された誤差値 Err の空間分布を図-9に示す。ここでは、5月21日4:50と6:50における水平 σ 座標系と直交曲線座標系の結果が表示されている。また、比



(a) 5月21日 4:50



(b) 5月21日 6:50

図-9 誤差値 Err の空間分布

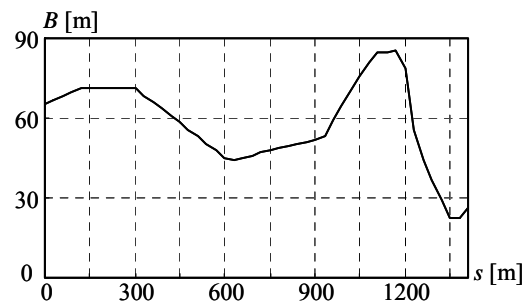


図-10 川幅 B の流下方向変化

較のために、川幅 B の流下方向変化を図-10に示す。これを見ると、両座標系共に、誤差値 Err は流下方向に増加する傾向が見られるものの、その大きさは、全横断面において水平 σ 座標系の方が直交曲線座標系よりも小さくなっている。これらの誤差値 Err と川幅 B の空間分布を比べると、直交曲線座標系の Err は、川幅の流下方向変化が顕著となる $s=300\text{m}$ 以降から増大しており、川幅が拡大するときよりも縮小時きにおいて Err の増加が顕著となっている。一方、水平 σ 座標系に関しては、直交曲線座標系の場合と異なり、誤差値 Err と川幅 B には明確な相関性は見られない。このように、水平 σ 座標系は一般座標系と同じ境界適合格子を用いているので、直交曲線座標系において見られる川幅変化の影響に伴う Err の増加を、水平 σ 座標系では大幅に抑制していることが分かる。

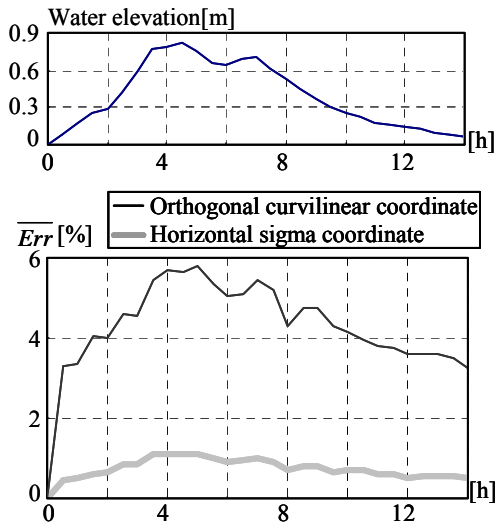


図-1-1 空間平均誤差値 \overline{Err} の時系列変化

さらに、各座標系における計算精度の時間変化を調べるために、上述した誤差値 Err を計算領域における全横断面にわたり平均した空間平均誤差値 \overline{Err} の時系列変化を図-1-1に示す。これを見ると、水平 σ 座標系と直交曲線座標系ともに、河川水位の増減とともに空間平均誤差値 \overline{Err} が増減するものの、水平 σ 座標系における \overline{Err} が直交曲線座標系の値よりも明確に小さい。より詳細に比べると、 \overline{Err} の範囲としては、水平 σ 座標系では 0.5~1.1%であるのに対して、直交曲線座標系では 3.3~5.8%となっており、水平 σ 座標系における計算精度は一般座標系と同程度となっている。また、同一時点における両者の値を比べたところ、直交曲線座標系における \overline{Err} は水平 σ 座標系における値の 4.8~7.4 倍となり、両者の差は顕著である。以上の結果より、水平 σ 座標系は、川幅変化に起因する直交曲線座標系の誤差値 Err の増加を大幅に抑制することが可能であり、一般座標系と同程度の計算精度を有していることから、実河川流計算に対する水平 σ 座標系の基本的な有効性が示された。

5. 結論

本研究で得られた主な結論は以下のとおりである。

(1) 高精度で低計算負荷を実現し得る河川流計算用の水平座標系として、鉛直座標系として用いられている一種の境界適合座標系である σ 座標系を水平座標系に応用する、という水平 σ 座標系を提案した。この水平 σ 座標系に関しては、デカルト座標系と直交曲線座標系より座標変換し、それぞれにおける平面二次元流動場に対する基礎方程式系を導出した。

その導出された水平 σ 座標系に基づく基礎方程式系は、座標変換前の式系と比べて大きな変化が無く、水平 σ 座標系がデカルト座標系や直交曲線座標系と同様な数値モデルの簡便さを保っていることが示された。

(2) 水平 σ 座標系に基づく河川流モデルの基本的な有効性を検証するために、計算領域の中央に狭窄部のある直線開水路流れに対する数値計算を実施した。水平 σ 座標系とデカルト座標系、一般座標系における計算結果を比較したところ、水平 σ 座標系の計算精度は一般座標系の場合と大差なく、その上、水平 σ 座標系における CPU 時間はデカルト座標系とほぼ同程度であることが示された。

(3) 水平 σ 座標系と一般座標系、直交曲線座標系を用いて、千葉県手賀沼における主要流入河川である大堀川を対象とした洪水流計算を実施した。その結果、直交曲線座標系では川幅の変化に伴って誤差値 Err が大きく増加するのに対して、水平 σ 座標系では誤差値 Err の増加が大幅に抑制されていることが示された。このことより、水平 σ 座標系に基づく河川流モデルの実河川流計算への基本的な適用性が明らかとなった。

謝辞：東京理科大学理工学部土木工学科西村司教授には、本論文を取りまとめる際に有益な御助言と御指導を賜った。また、本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C) (2) (課題番号：16560453, 研究代表者：二瓶泰雄) によるものである。ここに記して謝意を表する。

付録 一般座標系における基礎方程式系

本研究で用いられた一般座標系の基礎方程式系について記述する。まず、平面二次元場における座標系を (ξ, η) とすると、座標変換のヤコビアン J は、次のように定義される。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (\text{A1})$$

ここで、 ξ 、 η 方向流速をそれぞれ u^ξ 、 u^η とすると、基礎方程式は以下のとおりである¹²⁾。

・連続式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{Hu^\xi}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{Hu^\eta}{J} \right] = 0 \quad (\text{A2})$$

・運動方程式（ ξ 方向）

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^\xi}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + \alpha_1 u^\xi u^\xi + \alpha_2 u^\xi u^\eta + \alpha_3 u^\eta u^\eta \\ & = -g \left\{ (\xi_x^2 + \xi_y^2) \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \xi} + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \eta} \right\} \\ & - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) \frac{u^\xi}{J} \sqrt{(\eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta)^2 + (-\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta)^2} \\ & + D_\xi \end{aligned} \quad (A3)$$

・運動方程式（ η 方向）

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^\eta}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + \alpha_4 u^\xi u^\xi + \alpha_5 u^\xi u^\eta + \alpha_6 u^\eta u^\eta \\ & = -g \left\{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial(H+z_b)}{\partial \eta} \right\} \\ & - \left(\frac{C_f}{H} + \frac{aC_b}{2} \right) \frac{u^\eta}{J} \sqrt{(\eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta)^2 + (-\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta)^2} \\ & + D_\eta \end{aligned} \quad (A4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \alpha_2 &= 2 \left(\xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ \alpha_3 &= \xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \alpha_4 &= \eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \alpha_5 &= 2 \left(\eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ \alpha_6 &= \eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (A5)$$

また、運動方程式（式（A3）,（A4））の右辺最終項 D_ξ , D_η は水平拡散項に相当している。

参考文献

- 1) 土木学会：水理公式集 [平成 11 年度版], 丸善, pp.109-119, 1999.
- 2) 渡邊明英, 西村達也：河川流に関する数値解析の現状

- と課題, 河川技術論文集, Vol.6, pp.25-30, 2000.
- 3) 灘岡和夫, 八木宏：SDS&2DH モデルを用いた開水路水平せん断乱流の数値シミュレーション, 土木学会論文集, No.473/II-24, pp.35-44, 1993.
 - 4) 福岡捷二, 渡辺明英, 津森貴行：樹木群を有する開水路における平面せん断流の構造とその解析, 土木学会論文集, No.491/II-27, pp.41-50, 1994.
 - 5) 池田駿介, 空閑健, 陳飛勇：両岸に植生帯を有する開水路流れに発生する大規模水平渦の安定性と運動量輸送, 土木学会論文集, No.551/II-37, pp.63-73, 1996.
 - 6) 西本直史, 清水康行, 青木敬三：流線の曲率を考慮した蛇行水路の河床変動計算, 土木学会論文集, No.456/II-21, pp.11-20, 1992.
 - 7) 土木学会：水理公式集 [平成 11 年度版], 丸善, pp.187-191, 1999.
 - 8) 佐藤慶太, 二瓶泰雄：河川洪水流シミュレーションに対するネスティング計算法の適用, 水工学論文集, Vol.49, pp.679-684, 2005.
 - 9) Bradbrook, K. F., Biron, P. M., Lane, S. N., Richards, K. S. and Roy, A. G.: Investigation of controls on secondary circulation in a simple confluence geometry using a three-dimensional numerical model, *Hydrolog. Process.*, Vol.12, pp.1371-1396, 1998.
 - 10) 長田信寿, 細田尚, 村本嘉雄：河岸侵食を伴う河道変動の特性とその数値解析法に関する研究, 土木学会論文集, No.621/II-47, pp.23-39, 1999.
 - 11) 土木学会：水理公式集 例題プログラム集 [平成 13 年度版], 2002.
 - 12) 安竹悠, 清水康行, 長谷川善彦, 舛甚甲介：2003 年台風 10 号による北海道日高地方厚別川の氾濫解析, 河川技術論文集, Vol.10, pp.237-242, 2004.
 - 13) 梶島岳夫：乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, pp.2-19, 1999.
 - 14) Hodges, B. R. and Imberger, J.: Simple curvilinear method for numerical methods of open channels, *J. Hydraulic Eng.*, Vol.127, No.11, pp.949-958, 2001.
 - 15) Phillips, N. A.: A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *J. Meteor.*, Vol.14, pp.184-185, 1957.
 - 16) Blumberg, A. F. and Mellor, G. L.: Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight, *J. Geophys. Res.*, Vol.88, pp.4579-4592, 1983.
 - 17) Stelling, G. S. and Van Kester, J. A. TH. M.: On the approximation of horizontal gradients in sigma co-ordinates for bathymetry with steep bottom slopes, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.18, pp.915-935, 1994.
 - 18) 吉川秀夫：改訂 河川工学, 朝倉書店, pp.25-29, 1980.

(2005.1.11 受付)

A RIVER-FLOW MODEL BASED ON A SIMPLIFIED BOUNDARY-FITTED COORDINATE

Yusuke YAMASAKI and Yasuo NIHEI

A new simplified horizontal coordinate for computations of river flow, named a horizontal sigma coordinate, is presented to employ boundary-fitted grids along river channels like a generalized coordinate without losing the simplicity of numerical models such as Cartesian and orthogonal curvilinear coordinates. For this purpose, we introduce the sigma coordinate system normally used as vertical coordinates for ocean current and meteorological simulations into the horizontal coordinates in river-flow simulations. The fundamental performance of the horizontal sigma coordinates is confirmed through its application to river-flow simulations. The computational results demonstrate that the horizontal sigma coordinates may be one of promising tools for the numerical approximation in the horizontal direction with computational efficiency as well as higher numerical accuracy.