

浅水流場を対象とした三次元数値モデルの近似手法に関する検討 ～ σ 座標系と静水圧近似に着目して～

二瓶泰雄*・山崎裕介**・西村司***・灘岡和夫****

流動モデルに含まれる鉛直座標系としての σ 座標系と鉛直方向運動に対する静水圧近似、という二つの近似手法の適用性や計算精度について検討した。 σ 座標系において問題となる水平圧力勾配項と水平拡散項の計算誤差を抑制する手法として、座標変換前のデカルト座標系においてこれらの項を評価する方法(修正 SvK 法)やそれを高精度化した手法(本手法)を取り上げ、これらの手法の計算精度を調べた。静水圧・非静水圧モデルの適用性を調べるために密度フロント計算を行った結果、非静水圧モデルは水平格子解像度が粗くなると計算精度は低下し、静水圧モデルの結果と概ね一致する。その要因は運動圧の計算精度が水平格子解像度依存性を持つためである。

1. はじめに

浅水域を対象とした三次元流動モデルは、水平・鉛直座標系や乱流モデル、鉛直方向運動等に対して、近似的な計算手法や仮定を含んでいる(例えば、Haidvogel & Beckmann, 1998)。このようなことから、これらの近似手法の適用性や計算精度を検討することは、今後、流動シミュレーション技術を発展させる上で必要不可欠である。

上述した様々な近似手法のうち、鉛直座標系については、簡便な境界適合座標系である σ 座標系を適用する例が多数見られる(例えば、Blumberg & Mellor, 1983)。この σ 座標系は、海表面や海底面形状を忠実に表現し得るため境界条件の取り扱いが容易となるものの、海底斜面上において鉛直密度成層が存在する場合には、基礎方程式中に含まれる水平圧力勾配項や水平拡散項の計算誤差が顕著となる(例えば、Stelling & Kester, 1994)。

また、鉛直方向運動の取り扱いに対しては、浅水域では、通常、流れの水平スケールが鉛直スケールよりも大きい場合、静水圧近似を仮定することが多い。しかしながら、浅水域では、密度フロント現象などのように、鉛直方向運動の取り扱いが重要となる流れ場が存在することから、流動モデルに対する静水圧近似の導入が、数値計算結果に及ぼす影響を把握することは重要となる。

そこで本研究では、鉛直座標系としての σ 座標系と、鉛直方向運動に対する静水圧近似、という三次元流動モデルに含まれる二つの近似手法に着目して、それらの近似手法の適用性や計算精度について検討する。ここでは、① σ 座標系に起因する計算誤差を軽減するための方法を検討するとともに、②密度フロントを例として、浅水流場における静水圧近似の適用性を幅広い条件下において調べる。

2. 流動モデルの概要

本研究で用いた流動モデルは、 σ 座標系・ブシネスク近似に基づく三次元非静水圧流動モデル(以下、非静水圧モデルと呼ぶ)である(Nihei ら, 2002)。この非静水圧モデルにおける基礎方程式は、水平・鉛直方向運動方程式と圧力に関するポアソン方程式である。ここで、圧力 p は、打ち切り誤差を考慮して、静水圧成分 p_s とそれからの偏差である運動圧成分 p_d に分離され、この運動圧成分 p_d に関してはポアソン方程式により求める。

また、静水圧近似の適用性を検討する際には、非静水圧モデルとともに、静水圧近似に基づく流動モデル(以下、静水圧モデルと呼ぶ)を用いる。この静水圧モデルでは水平方向運動方程式と連続式を基礎式とし、静水圧近似の導入部分以外は非静水圧モデルと同じ構成である。

数値解法に関しては、静水圧・非静水圧モデルともに有限差分法を用いており、各変数の配置に関してはスタaggeredメッシュ系を採用している。基礎方程式系における差分精度に関しては、移流項には三次精度風上差分を、その他の項には二次精度中央差分をそれぞれ適用している。また、非静水圧モデルにおいては、MAC法と類似した部分段階法を適用している。

3. σ 座標系における計算誤差軽減方法の検討

(1) 誤差軽減方法の概要

海表面・海底面を忠実に再現する σ 座標系を、斜面上の密度成層場に適用した場合、静水圧の水平勾配項(HPG項)と水平拡散項(HD項)において計算誤差が顕著となることが指摘されている。これは、 σ 座標系変換後の式形をそのまま差分近似すると(以下、この手法を従来法と呼ぶ)、差分計算上の数値誤差が発生するためである。このような σ 座標系に起因する問題点を解決するために、これまでに様々な手法が提案されている(例えば、Stelling & Kester, 1994; Slordal, 1997)。Slordal (1997)は、Stelling & Kester (1994)の考え方を発展させて、 σ

* 正会員 博(工) 東京理科大学講師 理工学部土木工学科
** 学生会員 修(工) 東京理科大学大学院 理工学研究科土木工学専攻博士後期課程
*** 正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科
**** フェロー 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究科情報環境学専攻

座標変換後の式系を差分化するのではなく、座標変換前のデカルト座標系に基づいて HPG 項や HD 項を評価している。具体的には、例えば、HPG 項を評価する際に必要となる密度水平勾配項に関しては、**図—1**に示すように、 $u_{i,k}$ と同一高さにおける格子 $i, i+1$ での密度値 ρ_R, ρ_L を鉛直内挿して求め、それを用いて水平方向の密度勾配を計算する。同様な手順は密度などの水平拡散項の計算にも適用される。Slordal (1997) は空間内挿法として線形補間（以下、修正 SvK 法とする）を用いている。本研究では、従来法と修正 SvK 法、という 2 つの手法に加えて、空間内挿法として三次精度スプライン補間（本手法）を用いて、HPG 項や HD 項の計算精度について比較する。

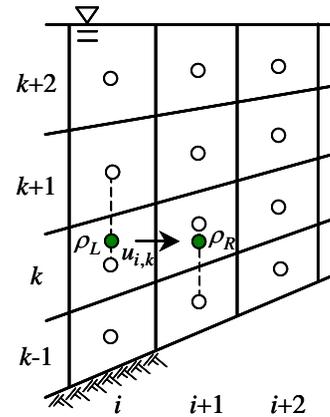
(2) 水平圧力勾配項 (HPG 項)

σ 座標系における計算精度を評価するとき頻りに用いられる、静力学的にバランスしている斜面上の密度成層場を想定して (**図—2 (a)**)、上述した 3 つの計算法における HPG 項の計算精度を検討する。ここでは、水平方向 20000m、鉛直方向 15~20m とし、領域中央に勾配 1/1400 の斜面を設ける。計算格子数は 20×20 とする。ここでは、**2.** で示した非静水圧流動モデルを用いており、乱流拡散項は 0 とし、流動モデル中における HPG 項を計算するときには上記の 3 つの計算法を適用する。この計算条件下では、流れの駆動力は計算誤差により生じる HPG 項となる。境界条件としては、左右端・下端において slip 壁条件、上端境界は水表面条件を与えている。初期条件としては静水状態を仮定している。

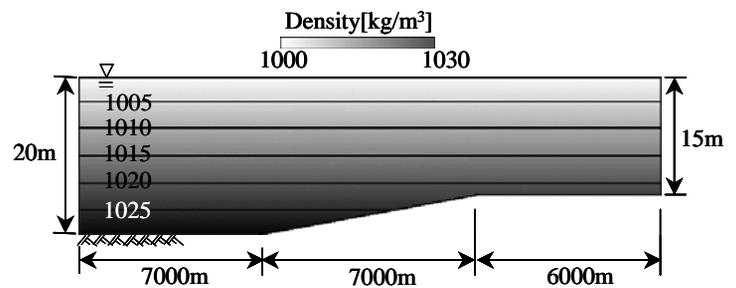
図—2 (b), (c) は、従来法と本手法における計算開始 10 分後の密度コンターと流速ベクトルを示している。これらを見ると、計算初期では静力学的にバランスしているにもかかわらず、従来法による計算結果では、明確な水平方向流れが形成されている。一方本手法の場合には顕著な流れは起こらず、密度コンターは初期状態から変化していない。このような状況は修正 SvK 法の結果に関しても確認されている。これらの結果より、従来法と比べて、本手法や修正 SvK 法を用いることにより、HPG 項の計算精度が著しく改善されていることが確認された。

(3) 水平拡散項 (HD 項)

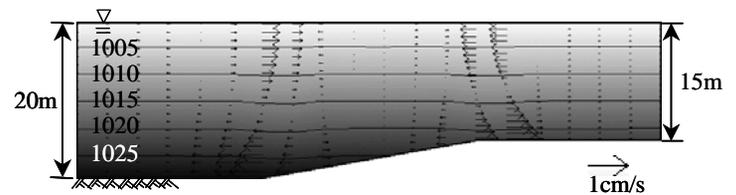
HD 項の計算精度を調べるために、**図—3 (a)** のような海底斜面上における鉛直密度成層場を初期条件とした密度の水平拡散計算を行う。計算領域としては、水平方向 6000m、鉛直方向 180~260m とし、計算領域内に底面勾配 1/75 の斜面を設ける。ここでは、鉛直格子解像度の影響を見るために、水平格子数 12 と一定とし、鉛直格子数は 10~40 とした。拡散係数については、鉛直拡散係数は 0 とし、水平拡散係数は一定値 ($=5.0\text{m}^2/\text{s}$) を与えた。



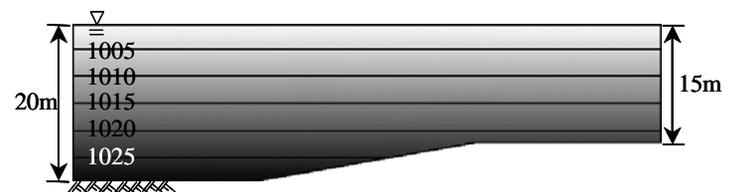
図—1 σ 座標系誤差軽減策 (i, k :格子番号)



(a) 初期密度分布



(b) 従来法

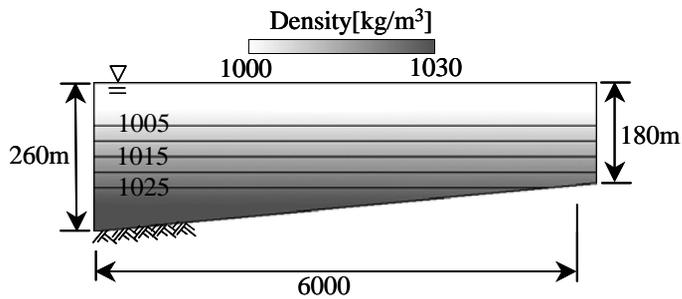


(c) 本手法

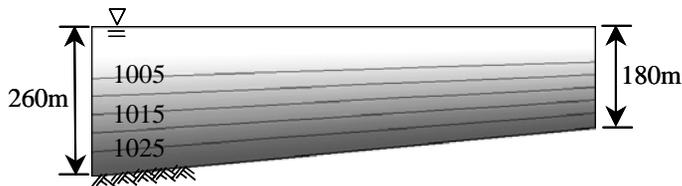
図—2 σ 座標系における HPG 項の計算精度 ($t=10\text{min}$, コンター線上の値は密度 [kg/m^3] を示す)

このような計算条件を設定することにより、水平拡散項の計算誤差が存在しない場合には、密度分布は初期条件のままとなる。なお、この水平拡散計算では、従来法としては、乱流拡散項を σ 座標系に変換したときに生じる高次項全てを省略した形 (Mellor & Blumberg, 1985) として計算している。

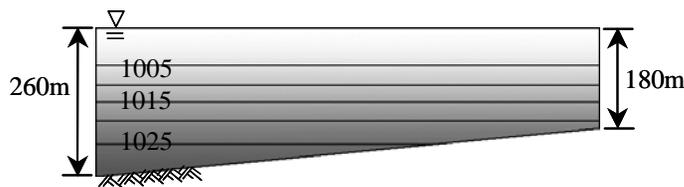
図—3 (b)~(d) は、鉛直格子数 20 の場合における計算開始 30 日後の密度コンターを示している。これを見ると、従来法の場合には、よく知られているように、密度コンターが海底斜面とほぼ平行な分布形状となっていることが分かる。一方、修正 SvK 法や本手法では、密度コンター線は、初期条件と同様にほぼ水平となっており、従来法と比較して計算誤差が抑制されている。しかしながら修正 SvK 法の結果は、初期条件や本手法の計算結果と比べて密度の鉛直拡散が生じていることが分かる。こ



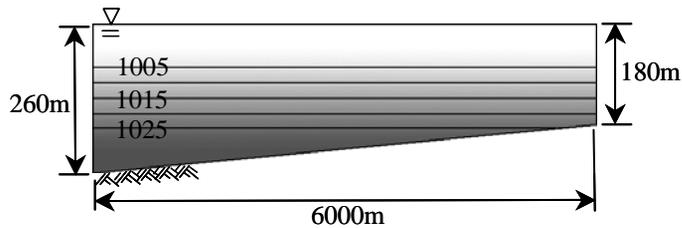
(a) 初期密度分布図



(b) 従来手法

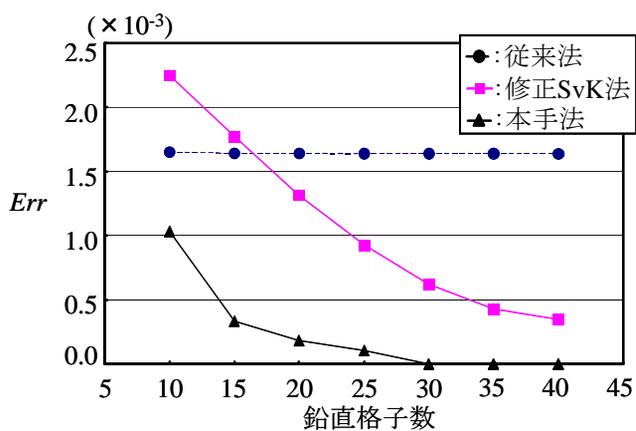


(c) 修正 SvK 法



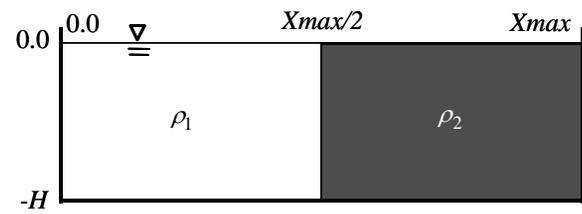
(d) 本手法

図—3 水平拡散計算における HD 項の計算精度 ($t=30\text{day}$, コンター線上の値は密度を示す)



図—4 誤差値 Err と鉛直格子数の関係(水平拡散計算)

これらの計算誤差を定量的に比較するために、密度計算値と初期密度との差の絶対値を空間平均し、基準密度で無次元化した誤差値 Err を各計算法において算出し、そこで得られた $t=30$ 日での Err と鉛直格子数の関係を図—4 に示す。これを見ると、修正 SvK 法は鉛直格子数が多い時には従来法よりも計算精度が良いものの、鉛直格子数が少ないときには従来法の計算精度と同程度かやや下回っている。それに対して本手法では、他の計算法よりも



図—5 初期密度分布 (Lock Exchange Problem)

表—1 計算条件 (Lock Exchange Problem)

	Case 1	Case 2
X_{max}	1.0 m	400.0 m
H	0.155 m	10.0 m
ρ_1	1000.0 kg/m ³	1000.0 kg/m ³
ρ_2	1033.0 kg/m ³	1005.0 kg/m ³
$\Delta x/H$	1/15.5	1/10, 1/5, 2/5, 1/2, 4/5
$\Delta z/H$	1/30	1.0, 1.6, 2.0, 2.5, 4.0

計算誤差は小さくなっている。このことから、密度等を鉛直内挿する際に、補間法の精度を向上させると HD 項の計算誤差が大幅に抑制されていることが示された。

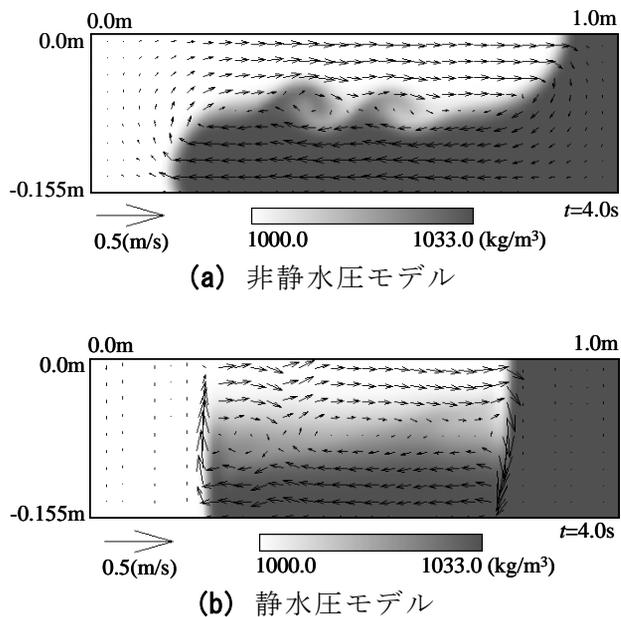
4. 静水圧近似の適用性

(1) 計算条件

浅水流場に対する静水圧近似の適用性はいくつか検討されているものの (Casulli & Stelling, 1999; 木下, 2001), 幅広い計算条件下で行われているとは言い難い。そこで、基本的な二次元重力フロント現象である Lock Exchange Problem を対象にして、静水圧近似の導入が流動シミュレーション結果、特に密度フロント構造やフロント速度などに及ぼす影響について検討する。この Lock Exchange Problem とは、図—5 に示すように、矩形容器中に密度の異なる二つの水塊が、容器中央で分け隔てられ、計算開始とともに相対的に低密度の水塊が上層を、高密度の水塊が下層を進行する、という重力フロント場である。

ここでは静水圧モデルと非静水圧モデルを表—1 に示されている 2 つの計算条件に適用する。まず、Case 1 は、赤堀ら (1999) が実施した室内実験条件と同一とし、計算結果と実験結果の比較を通して、フロント構造や密度鉛直混合過程を詳細に検討する。Case 2 では水平・鉛直格子幅を幅広く変化させており、静水圧・非静水圧モデルの格子解像度依存性を検討する。なお、両モデルの乱流モデルとしては、Smagorinsky モデルを用いている。

境界条件としては、底面では対数条件を用い、左右端の境界では slip 壁条件を適用する。また、水表面に関しては、水平方向流速については slip 条件を、鉛直方向流速は 0 とする。初期条件は静止状態とし、密度分布は図—5 のように与え、密度以外の流速等を全て 0 とする。



図—6 瞬間流速ベクトルと密度コンター図 (Case1)

(2) 計算結果と考察

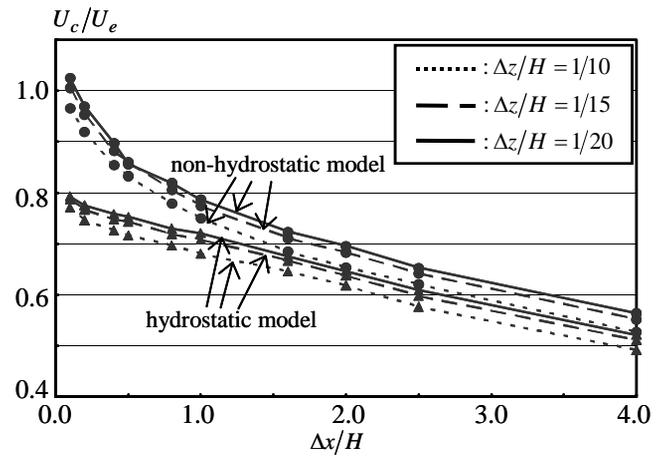
a) 密度フロントの空間構造

Case1 における静水圧モデルと非静水圧モデルによる計算結果を図—6 に示す．図中には，計算開始 4 秒後における流速ベクトルと密度コンターが示されている．非静水圧モデルの結果（同図 (a)）に関しては，フロント部は上・下層ともに丸みを帯びた形で水平方向に進行し，上・下層間の界面近傍では二つの明瞭な大規模渦が生成されている．そのような大規模渦運動と連動して，密度が鉛直方向に拡散されている．このようなフロントの形状や界面近傍での大規模渦構造は，赤堀ら（1999）の可視化結果からも確認されており，この非静水圧モデルの計算精度が概ね良好であることが確認された．一方，同図 (b) に示されている静水圧モデルの場合には，フロント部において顕著な鉛直流速が発生し，それと連動してフロント部が鋭く切り立っている様子が分かる．このように，密度フロント構造に関する計算結果は，静水圧近似を導入することにより，室内実験結果や非静水圧モデルの計算結果とは大きく異なることが明らかとなった．

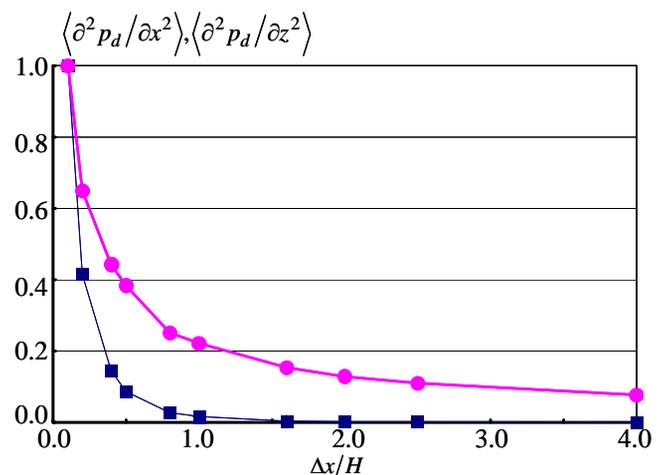
b) 格子解像度の影響

上述したように，静水圧モデルと非静水圧モデルの計算結果における密度フロント構造は大きく異なるものの，その違いは計算格子解像度に大きく依存する（木下，2001）．そこで，格子解像度と静水圧近似導入の影響との関連性を検討するために，Case2 の計算を通して，水平・鉛直方向格子解像度 ($\Delta x, \Delta z$) が静水圧モデルや非静水圧モデルの計算結果に与える影響について検討する．

まず，Case2 においても，Case1 と同様に，密度フロント構造を見たところ，水平格子解像度が粗くなると，静



図—7 無次元フロント速度の格子解像度依存性 (Case2, $t=200s$)



図—8 水平格子解像度に対する運動圧の算定精度 (Case2, $t=300s$)

水圧モデルと非静水圧モデルの計算結果が類似してくる傾向が確認された．具体的には，非静水圧モデルの場合には明確な密度フロント構造は形成されず，一方，静水圧モデルでは数値拡散に起因してやや丸みを帯びたフロント部が形成される．また，鉛直格子解像度に関しては，水平方向格子解像度と比べて，大きな影響を及ぼしていないことが確認されている（Nihei ら，2002）．

格子解像度が計算結果に及ぼす影響を定量化するために，静水圧モデルと非静水圧モデルによる結果から，フロント進行速度について比較したものを図—7 に示す．図中では，フロント進行速度の計算値 U_c は，以下のような Turner (1973) によるフロント速度の実験式 U_e で無次元化されている．

$$U_e = 0.44\sqrt{g'H} \quad (1)$$

ここで， g' は有効重力 ($g' = \epsilon g$ ， ϵ は基準密度 ρ_0 からの密度偏差分 ρ' と ρ_0 との比)， H は水深である．これを見ると，まず，静水圧モデルに関しては，無次元フロント速度は最大でも 0.8 程度であり，また，水平格子幅の増加とともに無次元フロント速度は減少し，計算精度が低下している．一方，非静水圧モデルに関しては，水平格子解像度が細かいときには，無次元フロント速度はほぼ

1 となり、静水圧モデルよりも計算精度は良いことが分かる。しかしながら、水平格子解像度が粗くなるとともに計算精度が低下し、その低下量は静水圧モデルの場合よりも大きく、 $\Delta x/H > 1.0$ の場合には、両モデルの結果はほぼ一致している。このように、水平格子幅が水深よりも大きい場合には、静水圧モデルと非静水圧モデルの計算結果に大きな差が生じないことが明らかとなった。なお、鉛直格子解像度を幅広く変化させても、フロント速度は大きくは変化しないことが確認される。

このような非静水圧モデルの水平格子解像度依存性を検討するために、非静水圧モデルにおいてのみ取り扱われている運動圧に着目する。非静水圧モデルでは、圧力のポアソン方程式を用いて運動圧を計算していることから、その方程式中における運動圧に関する水平・鉛直方向二階偏微分項に関する結果を図-8に示す。図中における $\langle \partial^2 p_d / \partial x^2 \rangle, \langle \partial^2 p_d / \partial z^2 \rangle$ は、 $t=300s$ における各項の絶対値を空間平均し、それを最も水平格子幅が小さい時の値 ($\Delta x/H = 0.1$) で無次元化されたものを表している。なお、この時の鉛直格子解像度としては $\Delta z/H = 1/20$ を採用している。これを見ると、水平格子解像度が粗くなると、両項の値ともに1から大幅に減少しており、非静水圧モデルにおける運動圧の計算精度が低下している。さらに、そのような計算精度の低下傾向は、水平方向二階偏微分項の方がやや顕著であり、 $\Delta x/H > 1.0$ のときにはほぼ0となっている。このような結果により、 $\Delta x/H > 1.0$ の時には、静水圧モデルと非静水圧モデルの計算結果に明確な差が形成されていないものと考えられる。以上の結果をまとめると、ポアソン方程式による運動圧の算定精度は水平格子解像度が粗くなると大幅に減少するため、非静水圧モデルにおける計算精度は低下し、非静水圧モデルと静水圧モデルの計算結果はほぼ一致するものと考えられる。

4. 結論

本研究では、浅水域での流動計算を対象として、鉛直座標系に対する σ 座標系と、鉛直方向運動に対する静水圧近似、という2つの近似手法の計算精度や適用性について検討を行った。主要な結論は以下の通りである。

- (1) 斜面上の密度成層場に対する σ 座標系における HPG 項や HD 項の計算誤差を軽減する方法として、 σ 座標系変換後の式系を差分化するという従来法ではなく、デカルト座標系上にてこれらの項を評価する、という修正 SvK 法やそれを高精度化した本手法の計算精度について調べた。その結果、修正 SvK 法や本手法は従来法と比べて計算誤差を減少させることが確認された。また、密度などの鉛直内挿法として、線形

補間（修正 SvK 法）よりもスプライン補間（本手法）を採用することにより、HD 項の計算精度が大幅に向上することが示された。

- (2) 密度フロント場に対して非静水圧・静水圧モデルを適用し、両モデルの計算精度について検討した。その結果、非静水圧モデルは、水平格子解像度が細かい場合には静水圧モデルよりも計算精度は良いものの、粗くなるとともに両モデルの計算結果は一致するようになる。その要因としては、非静水圧モデルにおける運動圧の計算精度は水平格子解像度が粗くなるとともに低下するためである。

謝辞：本研究の一部は、文部省科学研究費補助金基盤研究(B)(1)（課題番号：12450198、代表者：灘岡和夫）、(C)(2)（課題番号：13650573、代表者：西村司）によるものである。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 赤堀良介・清水康行・中山卓（1999）：鉛直方向に密度境界面を持つ流体の混合に関する数値計算，*水工学論文集*，Vol.43，pp.521-526.
- 木下嗣基（2001）：ネスティングバージョンの現状，MEC モデルワークショップ（第2回），pp.59-64.
- Blumberg, A. F. and G. L. Mellor (1983): Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight, *J. Geophys. Res.*, Vol.88, pp.4579-4592.
- Casulli, V. and G. S. Stelling (1999): Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic free-surface flows, *J. Hydraulic Eng.*, Vol.24, No.7, pp.678-686.
- Haidvogel, D. B. and A. Beckmann (1998): Numerical models of the coastal ocean, *The Sea*, John Wiley & Sons, Vol.10, pp.457-482.
- Mellor, G. L. and A. F. Blumberg (1985): Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system, *Monthly Weather Review*, Vol.113, pp.1379-1383.
- Nihei, Y., Y. Yamasaki, K. Nadaoka and T. Nishimura (2002): Influence of hydrostatic approximation on coastal current simulation, *ISOPE02* (printed).
- Slordal, L. H.(1997): The pressure gradient force in sigma-co-ordinate ocean models, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.24, pp.987-1017.
- Stelling, G. S. and J. A. TH. M. Van Kester (1994): On the approximation of horizontal gradients in sigma co-ordinates for bathymetry with steep bottom slopes, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol.18, pp.915-935.
- Turner, J.S. (1973) : Buoyancy effects in fluids, Cambridge University Press, pp.70-72.