

第7章 土のせん断強度

7. 1 組み合わせ応力

7. 7. 1 応力の座標変換

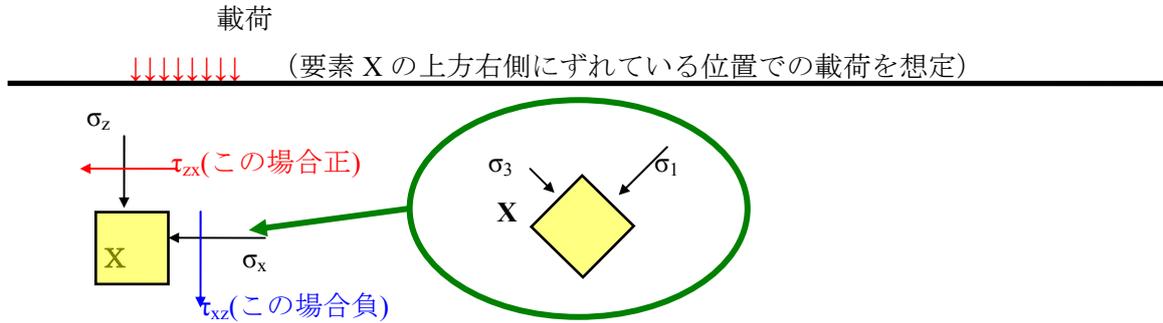


図 1

● 応力の座標変換の知識は、なぜ必要か？

例1) 土の二つの基本的せん断変形モード：

- 三軸圧縮変形
- 単純せん断変形、一面せん断変形

両者でのせん断強度の関連を理解するためには、応力の座標変換を理解する必要がある。

例2) 粘着力のない土（代表例、乾燥した砂）のせん断破壊は、どこかの面で応力比  $\tau/\sigma$  が所定の値（ $\tan \phi$ ： $\phi$ は内部摩擦角）に達すると破壊する。おなじ現象を主応力で考察すると、主応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  が所定の値（ $(1 + \sin \phi)/(1 - \sin \phi)$ ）に達すると破壊する。従って、任意の応力状態（ $\sigma_z, \tau_{zx}, \sigma_x, \tau_{xz}$ ）を、破壊面での応力状態（ $\tau, \sigma$ ）、あるいは主応力状態（ $\sigma_1, \sigma_3$ ）に変換することによって破壊に対する安全率が計算できるようにするためには、応力の座標変換を理解する必要がある。

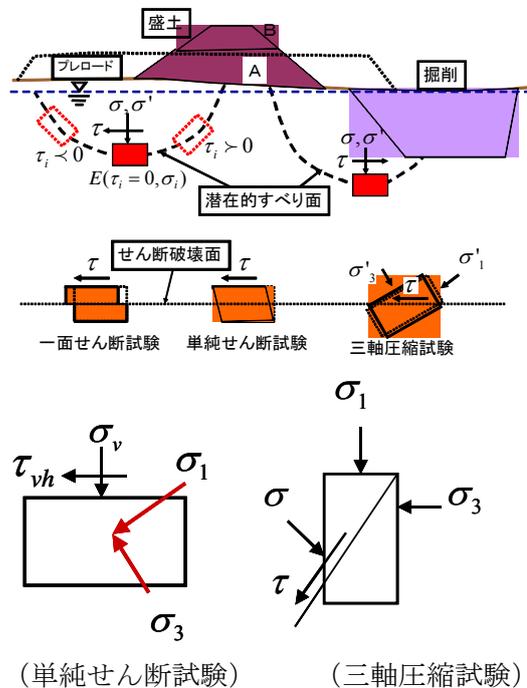


図 2

● 応力の正の定義：

直応力  $\sigma$ ：圧縮正、

せん断応力  $\tau$ ：Mohr 円表示のために、全て左回りを正とする（理由次頁）

[これは授業では、触れない]

(Tensor 表示)： 図 1 とは異なる。上下面と鉛直面において逆方向に作用しているせん断応力が同じ符号となる。図 1 の場合、右側面で下方向に作用している  $\tau_{xz}$  が正となる。しかし、これだと  $\tau_{xz}$  と  $\tau_{zx}$  が同一符号になり、Mohr 円の上下を使えず、不便である（理由：後述）。

●座標の導入（応力の Mohr 円表示のため）

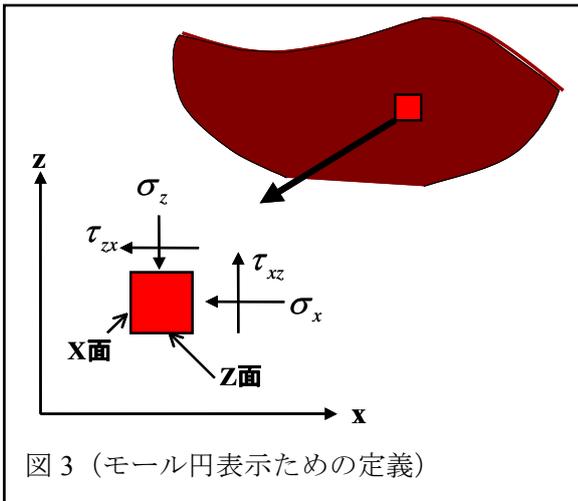


図3（モールの円表示のための定義）

矢印の方向が、それぞれの正の方向。  
従って、図1の要素に対しては

- $\sigma_z$  正
  - $\tau_{zx}$  正
  - $\sigma_x$  正
  - $\tau_{xz}$  負
- となっている。

\*要素におけるモーメントの釣り合いから、常に、 $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$  が成り立っている（要素の中心まわりのモーメントを考えれば分かる）。

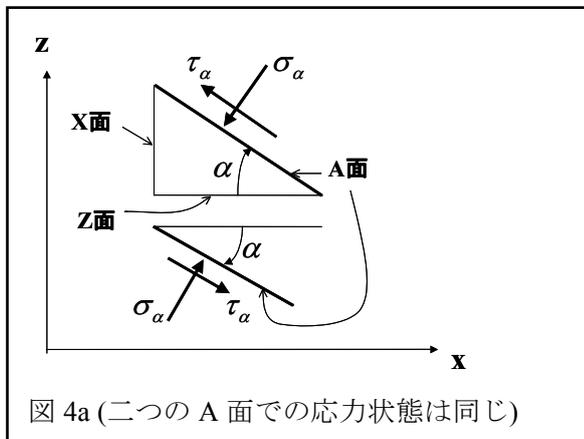


図4a（二つの A 面での応力状態は同じ）

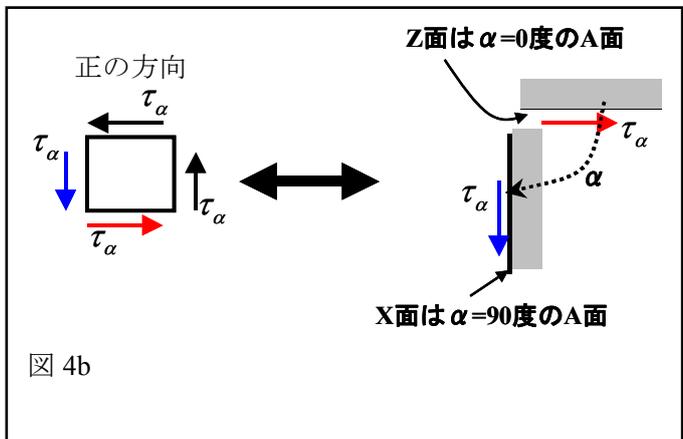


図4b

図4aのようにせん断応力  $\tau_\alpha$  を常に左回りを正に定義することにより、任意の方向の面 A に対する応力状態を考える場合、図4bに示すように  $\alpha = 0 \rightarrow 90$  度、あるいは  $360$  度のように自由に回転しても、常にせん断応力は左回りに向かっていてため、せん断応力の符号の定義に矛盾が生ぜず、「同一の A 面での表現」が適用できる。従って、一つの Mohr 円で正負のせん断応力を同時に表示できて、一つの応力状態を全面的に表現できる。

要素 X の応力状態を  
あらわす応力の Mohr 円

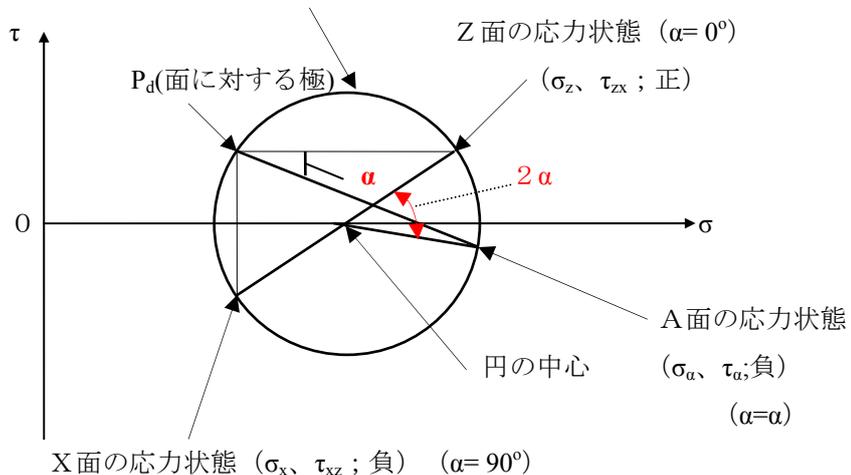


図5a

第7章 土のせん断強度

\* 上図に示すように、全ての角度  $\alpha$  に対する面を、同一のモール円を用いて同一基準で表示することが出来る。即ち、 $\alpha=0$  度  $\rightarrow$  A面=Z面；  $\alpha=90$  度  $\rightarrow$  A面=X面

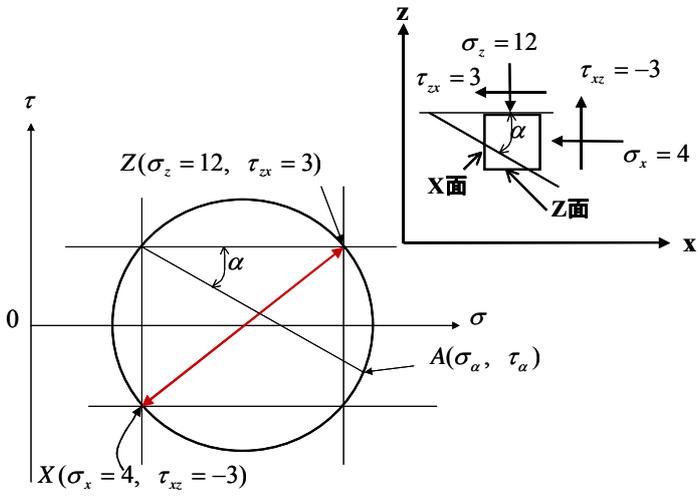


図 5b 数字を入れた例

[7章土のせん断強度 演習問題 7-1]

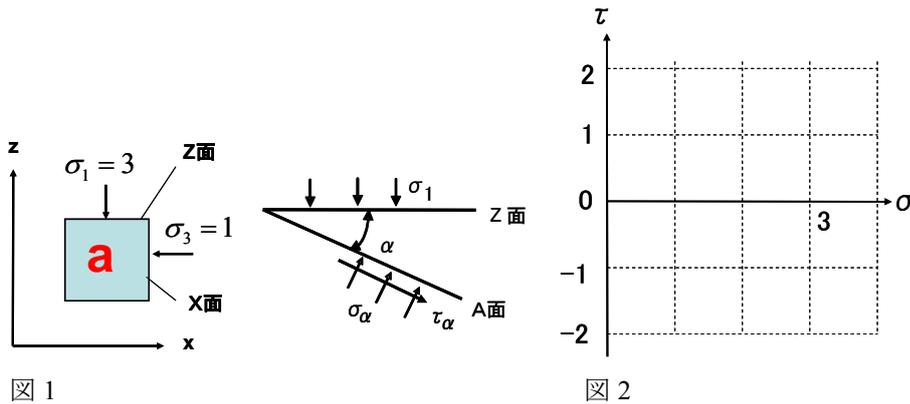
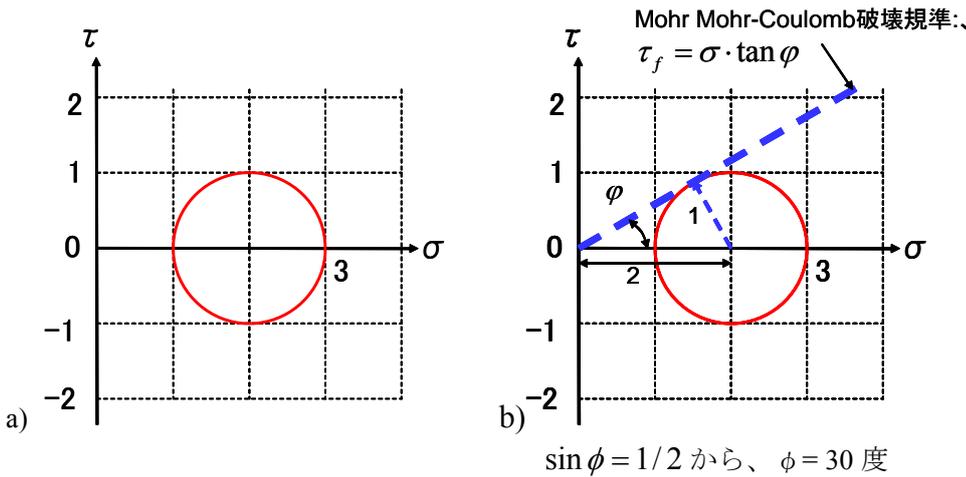


図1

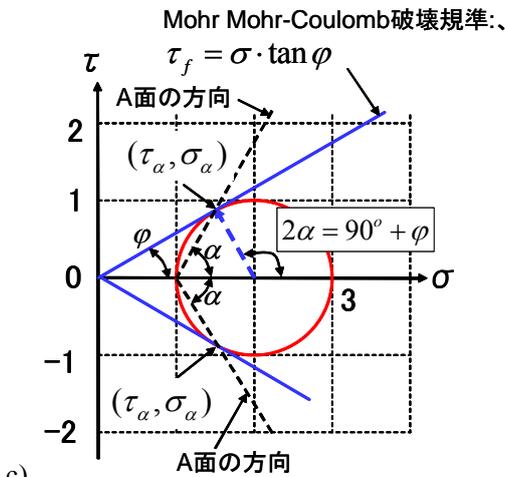
図2

- a) 図2に、図1に示す応力状態を表す Mohr 円を描け。ただし、圧縮力は正である。  
 b) 要素 a は、この応力状態でせん断破壊した。この土の Mohr Mohr-Coulomb 破壊規準は、 $\tau_f = \sigma \cdot \tan \phi$  で表される。この場合の内部摩擦角  $\phi$  (度) を求めて、この破壊規準を表す直線を図2に示せ。  
 c) 図1に示すように Z 面となす角度が  $\alpha$  (度) である A 面に、直応力  $\sigma_\alpha$  (圧縮が正) とせん断応力  $\tau_\alpha$  (反時計回りが正) が作用している。応力比  $\tau_\alpha / \sigma_\alpha$  が最大となる角度  $\alpha$  (度) を求めて、その場合の A 面の応力状態を図2に描いた応力モール円上に示せ。

[答]



$\sin \phi = 1/2$  から、 $\phi = 30$  度



c)  $2\alpha = 90^\circ + \phi$  から、 $\alpha = 45^\circ + \phi/2$

[ここは授業で教えない]

\*ひずみも Mohr 円でも、せん断ひずみ  $\gamma_{zx}$  と  $\gamma_{xz}$  の正負を、せん断応力の場合と同様に定義することにより、矛盾無く表示できる。

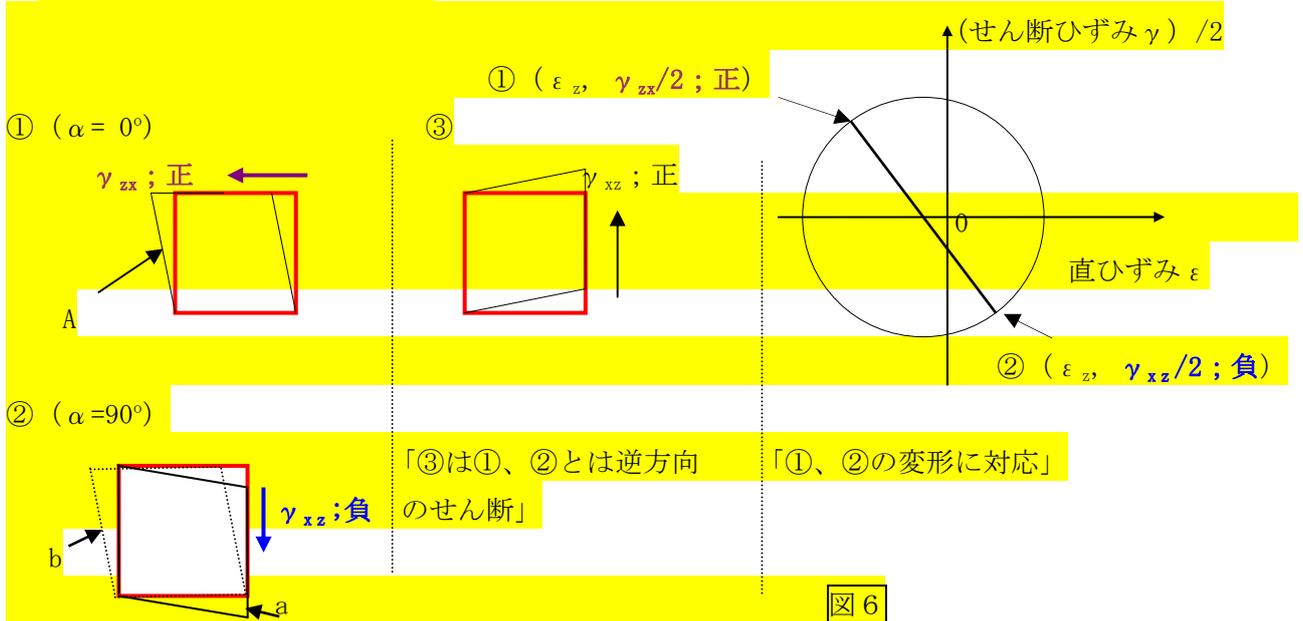


図6

①と②は同種類のせん断変形、剛体回転量が異なるだけ (a を左に剛体回転したのが b)。つまり、①と②のせん断変形は、微小ひずみ理論では同一)

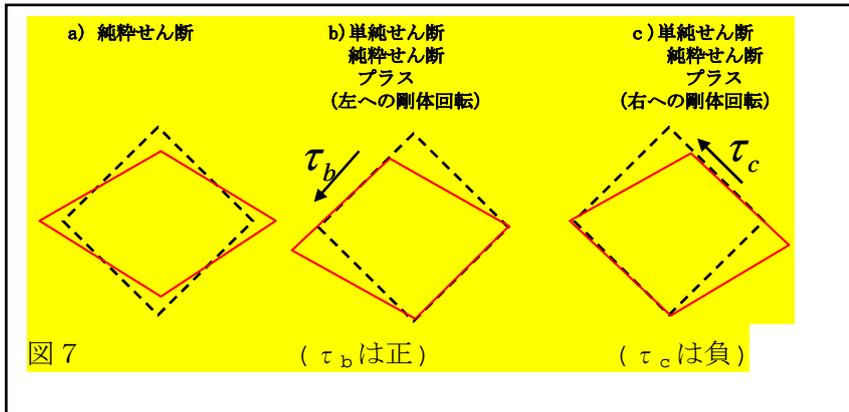


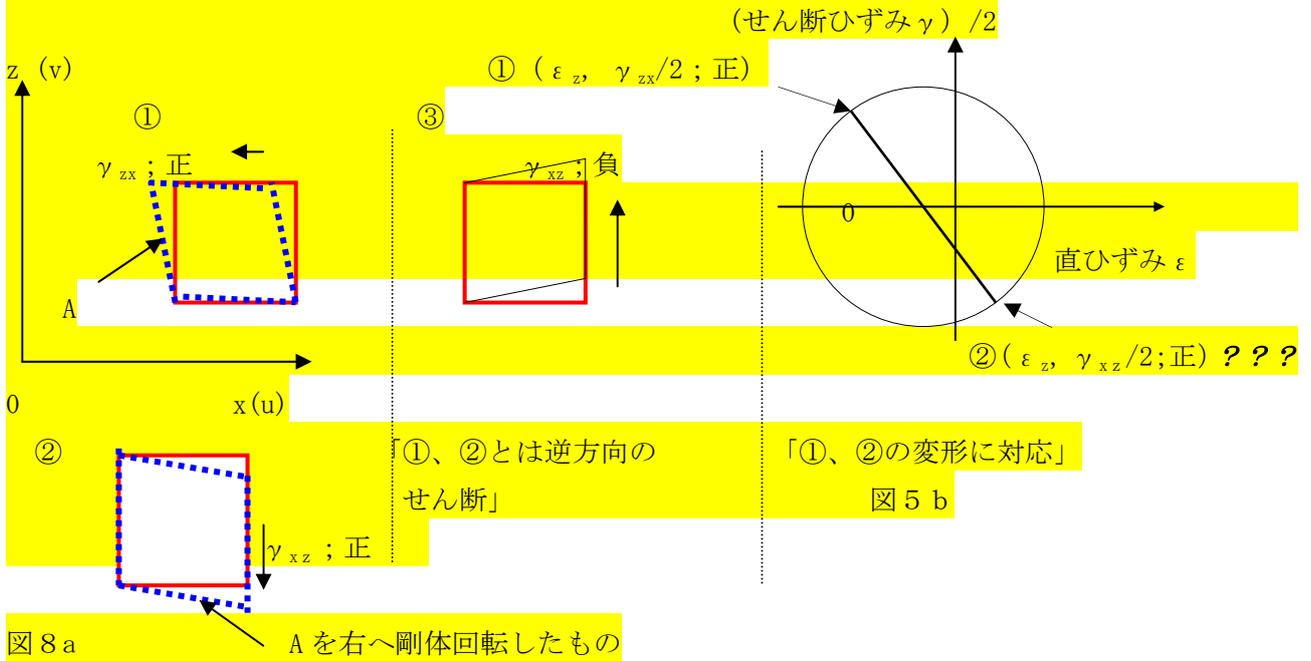
図7

つまり、Mohr 円に対応したせん断ひずみの符号の定義をすると、左図のように、同一せん断ひずみに対して正負の符号を与えることになる。

●「①と②の変形は、同一のせん断変形モードなので、同一の符号を持つせん断ひずみ、及びせん断とする」のが、Tensor 表示での符号。

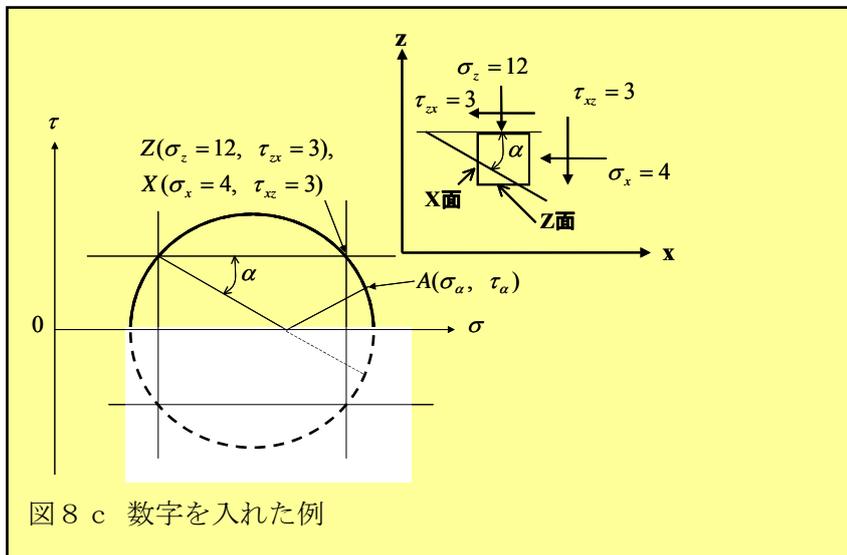
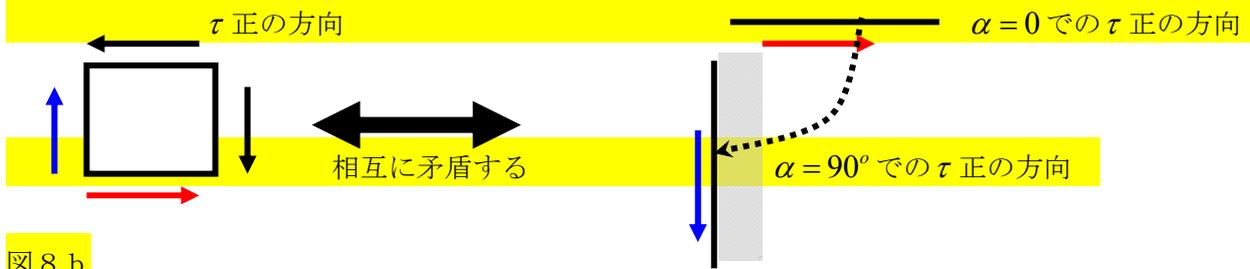
即ち、①と②のせん断ひずみは、同様に  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  と表現されて、同一のせん断剛性率

G を用いて、①に対しても： $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$ ；②に対しても： $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$  と表現される。



しかし、Mohr 円の上下が用いることは、できなくなる (図 8 b、8 c 参照)。

Tensor 表示用 (この場合のせん断応力の正負の定義は、Mohr 円用とは異なる)



- Mohr 円に適合してせん断応力の正負の定義をした場合の、座標変換。

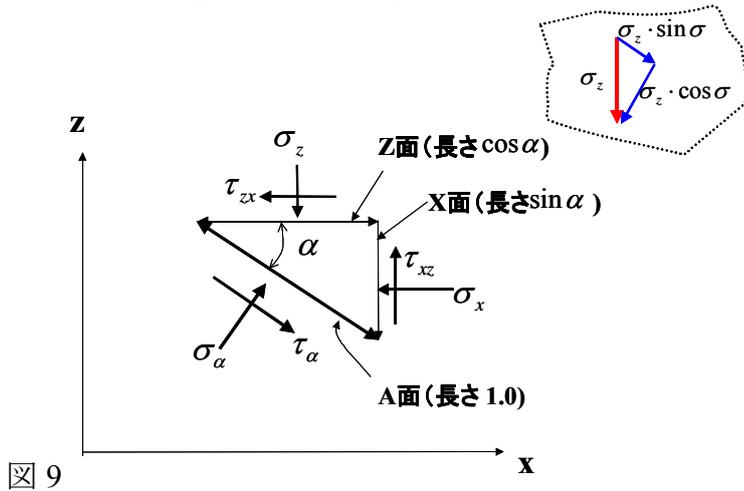


図 9

$\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  が作用している面の長さを 1.0 とすると、 $\sigma_\alpha$  方向と  $\tau_\alpha$  方向の力の釣り合いから、以下の式を得る。このとき、モーメントの釣り合いから、常に  $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$  が成り立っていることに気をつける。

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \cos\alpha(\sigma_z \cdot \cos\alpha + \tau_{zx} \cdot \sin\alpha) + \sin\alpha\{\tau_{xz} \cdot (-\cos\alpha) + \sigma_x \cdot \sin\alpha\} \\ &= \cos\alpha(\sigma_z \cdot \cos\alpha + \tau_{zx} \cdot \sin\alpha) + \sin\alpha(\tau_{zx} \cdot \cos\alpha + \sigma_x \cdot \sin\alpha) \\ \tau_\alpha &= \cos\alpha\{\sigma_z \cdot (-\sin\alpha) + \tau_{zx} \cdot \cos\alpha\} + \sin\alpha(\tau_{xz} \cdot \sin\alpha + \sigma_x \cdot \cos\alpha) \\ &= \cos\alpha\{\sigma_z \cdot (-\sin\alpha) + \tau_{zx} \cdot \cos\alpha\} + \sin\alpha(-\tau_{zx} \cdot \sin\alpha + \sigma_x \cdot \cos\alpha) \end{aligned}$$

[赤字]面積

[青字] $\sigma_z$  等の  $\sigma_\alpha$ 、あるいは  $\tau_\alpha$  の方向の成分

この2式を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_z \cdot \cos^2\alpha + \sigma_x \cdot \sin^2\alpha + 2\tau_{zx} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ \tau_\alpha &= -(\sigma_z - \sigma_x) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{zx}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \end{aligned} \quad (7-1)$$

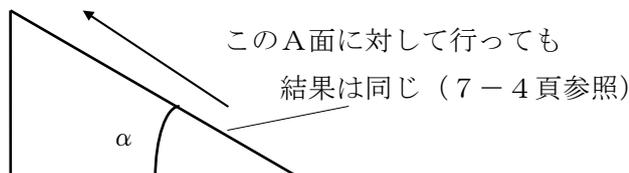
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

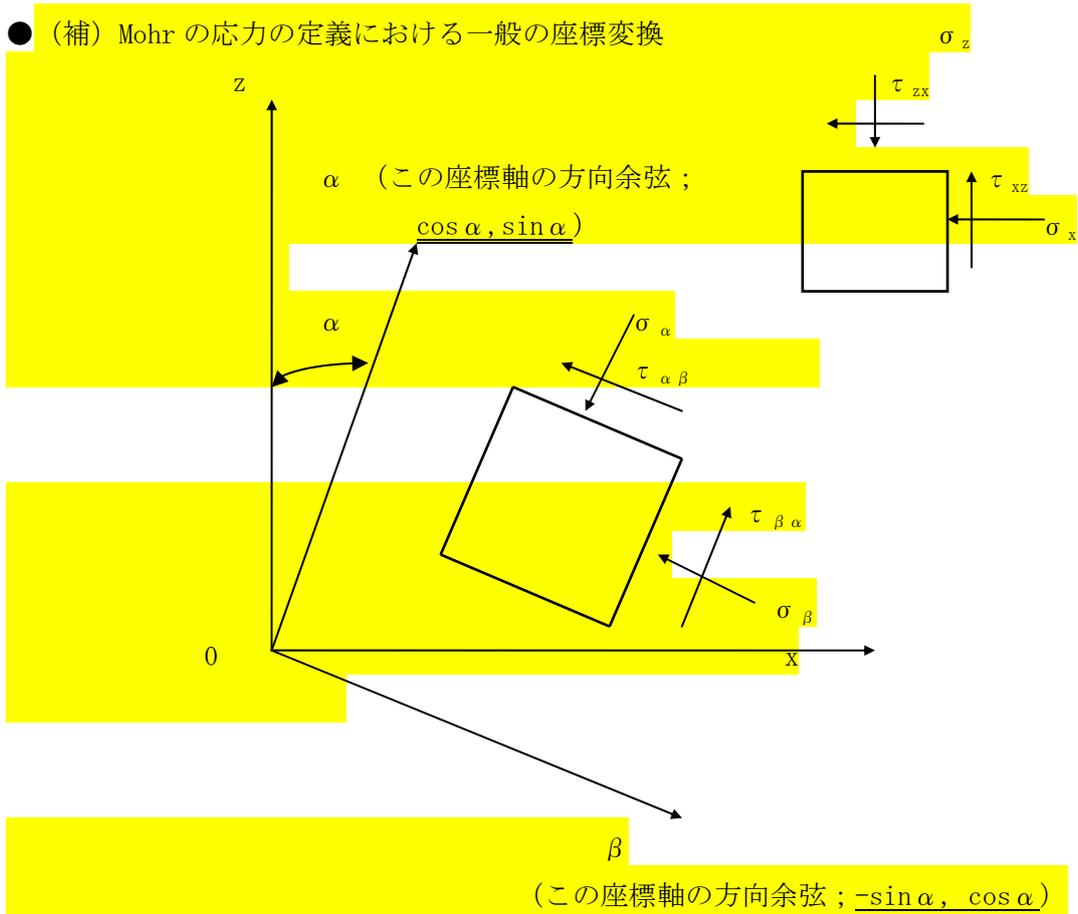
を参照して、この2式を更に整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \tau_{zx} \cdot \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{zx} \cdot \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (7-2)$$

\*注) 上記の考察を、



● (補) Mohr の応力の定義における一般の座標変換



$$\begin{pmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\alpha\beta} \\ -\tau_{\beta\alpha} & \sigma_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ -\tau_{xz} & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

● 上の式の  $-\tau_{\beta\alpha}, -\tau_{xz}$  を  $\tau_{\beta\alpha}, \tau_{xz}$  に置きかえると、通常の Tensor 表現での応力の定義に対する座標変換式になる。

● 三次元での座標変換に対しても、同じ rule が適用される。

●(7.2)式の意味：

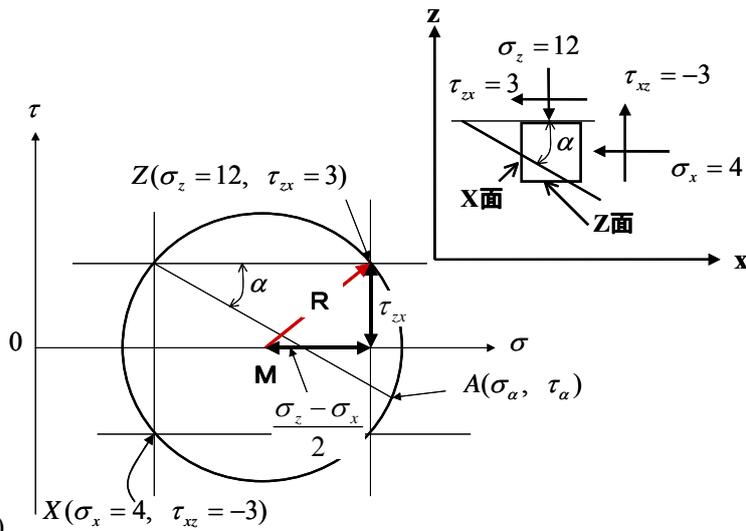


図 10a)

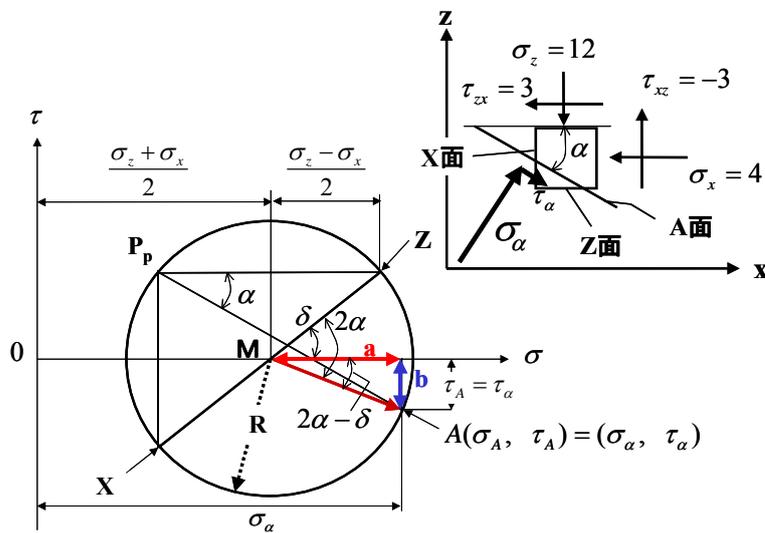


図 10b)

この式から角度 $\alpha$ を消去すると、

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2$$

となる。この式は、 $\sigma_z > \sigma_x > 0, \tau_{zx} > 0, \tau_{xz} < 0$  の場合である図 10a において、

$$\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 = \mathbf{MZ}^2 = \mathbf{R}^2 \quad (\text{定数})$$

を意味する。これは、図 10b において  $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{MA}^2 = \mathbf{R}^2$  であり、従って円の方程式：

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 = \mathbf{R}^2 \quad (\text{定数})$$

を意味する。ここで、 $\mathbf{R}$  は円の半径である。

●すなわち、今固定した応力状態が固定していて  $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{zx}, \tau_{xz}$  が定数ならば  $\mathbf{R}$  は定数となり、応力  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  は角度  $\alpha$  の関数であり、点  $A(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$  の座標の集合は  $\mathbf{R}$  を半径とする円を形成する。

→Mohr's circle of stress.

第7章 土のせん断強度

なお、図 10b の応力状態は、下図のような応力状態を示す。

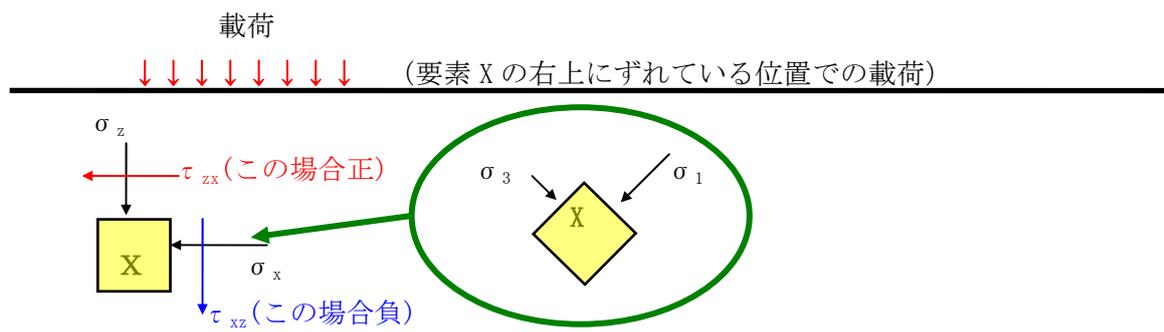


図 1

●応力の Mohr 円における「面に関する極 Pp」の説明

任意の角度  $\alpha$  を持つ A 面の応力状態 ( $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$ ) は、「応力のモール円において、MZ の方向から右回りに  $2\alpha$  の角度をなす MA 方向と Mohr's circle of stress の交点 A の座標 ( $\sigma_A$ 、 $\tau_A$ )」である (次頁の図 12 参照)。

**証明** まず、図 11 に示すように、応力のモール円上の Z 点は水平 Z 面での応力状態を表すとする。

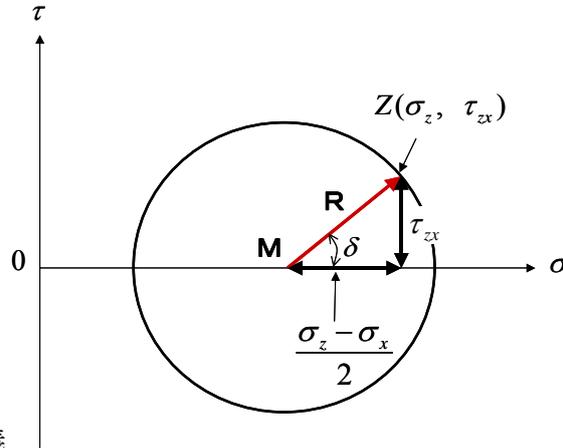


図 11 角度  $\delta$  の定義

角度  $\delta$  を図に示すように定義すると、

$$\tan \delta = \frac{\tau_{zx}}{\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}}; \quad \sin \delta = \frac{\tau_{zx}}{R}; \quad \cos \delta = \frac{\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}}{R} \quad (7.3a)$$

次に、図 12 に示す応力のモール円で、点 Pp からの水平線が水平 Pp-Z 面から角度  $\alpha$  をなす線とモール円との交点 A の座標の意味を考察する。  $\sigma$  軸と MA がなす角度は、 $2\alpha - \delta$  であるので、図 12 b での幾何学的関係から、A の座標は、

$$\sigma_A = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R \cdot \cos(2\alpha - \delta) = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R \cdot \cos(\delta - 2\alpha) \quad (7.3b)$$

$$\tau_A = -R \cdot \sin(2\alpha - \delta) = R \cdot \sin(\delta - 2\alpha) \quad (7.3c)$$

となる。式(7.3a), (7.3b), (7.3c)から、

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R \cdot (\cos \delta \cdot \cos 2\alpha + \sin \delta \cdot \sin 2\alpha) = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + (R \cdot \cos \delta) \cdot \cos 2\alpha + (R \cdot \sin \delta) \cdot \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{zx} \cdot \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\tau_A = R \cdot (\sin \delta \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos \delta) = (R \cdot \sin \delta) \cdot \cos 2\alpha - (R \cdot \cos \delta) \cdot \sin 2\alpha = \tau_{zx} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

が得られる。この式の右辺と「力の釣合から求めた任意の角度  $\alpha$  を持つ A 面の応力状態に対する(7.2)式の右辺」が同じであることから、

$$\sigma_A = \sigma_\alpha, \quad \tau_A = \tau_\alpha$$

が得られる。即ち、図 12 の応力のモール円での点 A は A 面の応力状態を表している。

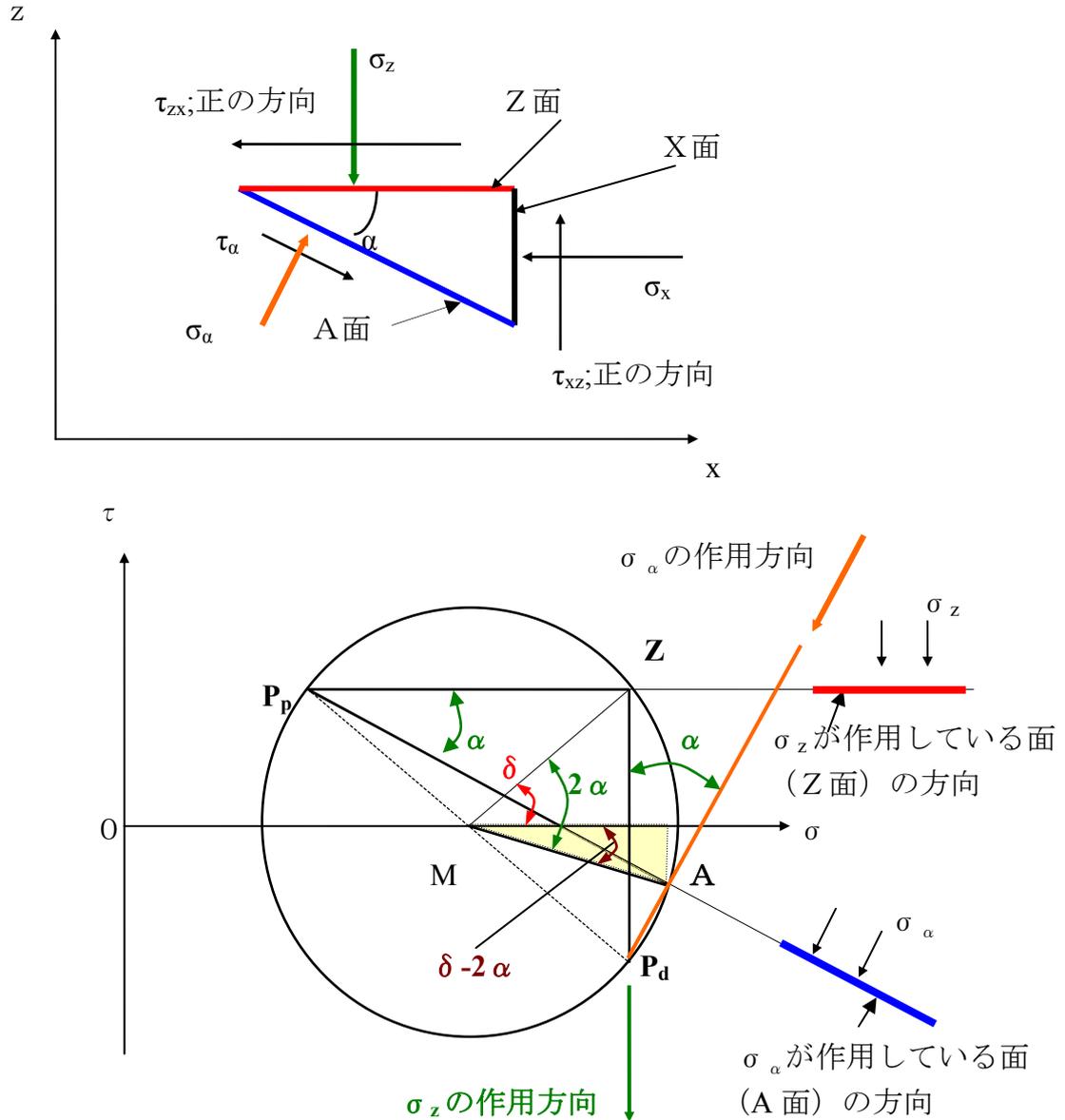


図 1 2

従って、応力のモール円の幾何学から、次の法則性が得られる。

- 「点 Z を通り  $\sigma_z$  が作用している面の方向 (水平方向) の線 = x 軸方向の線」と Mohr 円との交点が、面に関する極 Pole for plane  $P_p$  である。
- 「極  $P_p$  を通り  $P_p \cdot Z$  の方向から時計回りに角度  $\alpha$  をなす線」 = 「 $\sigma_\alpha$  が作用している面の方向の線」と Mohr 円との交点 A の座標 ( $\sigma_A, \tau_A$ ) が、面 A に作用している応力 ( $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ ) をあらわす。

同様に、

- 「点 Z を通り直応力  $\sigma_z$  の作用している方向 (鉛直方向) の線 = z 軸方向の線」と Mohr 円との交点が、直応力の作用方向に関する極, Pole for direction  $P_d$  である。
- 「極  $P_d$  を通り  $P_d \cdot Z$  から時計回りに角度  $\alpha$  をなす線」 = 「直応力  $\sigma_\alpha$  の作用方向の線」と Mohr 円との交点 A の座標が、面 A に作用している応力 ( $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ ) をあらわす。
- 極  $P_p$  と  $P_d$  は、Mohr 円の直径の反対側に位置する。





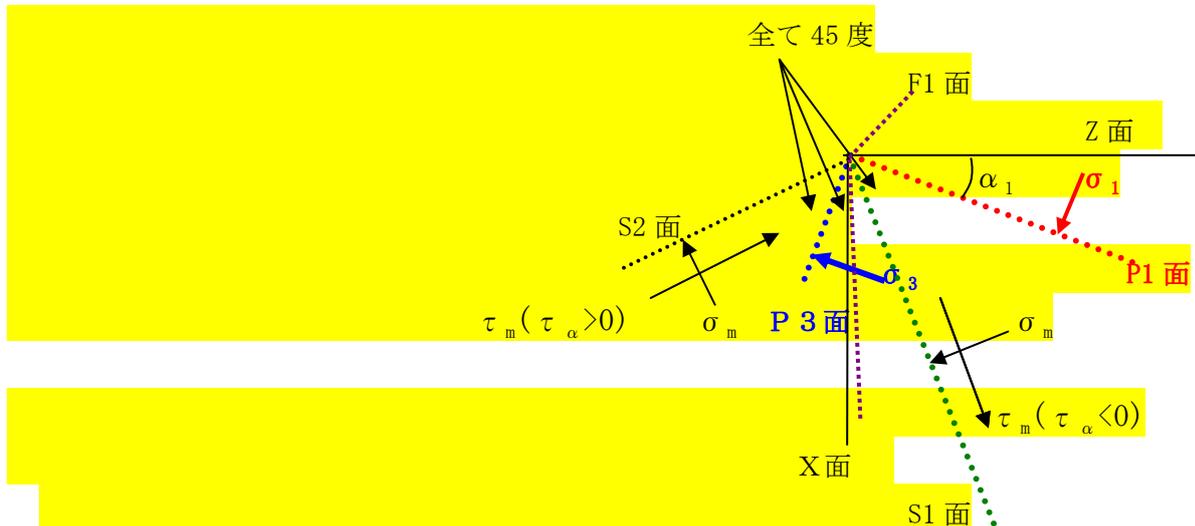
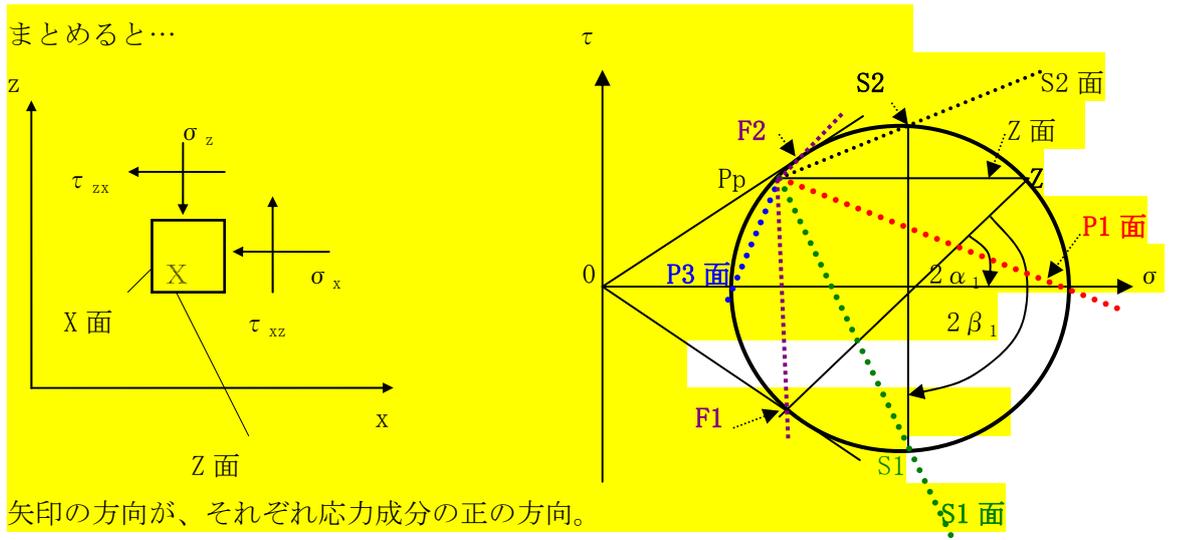


図 15

「7. 1 2 応力の Mohr 円の表示」

Z面とX面が主応力の場合の議論

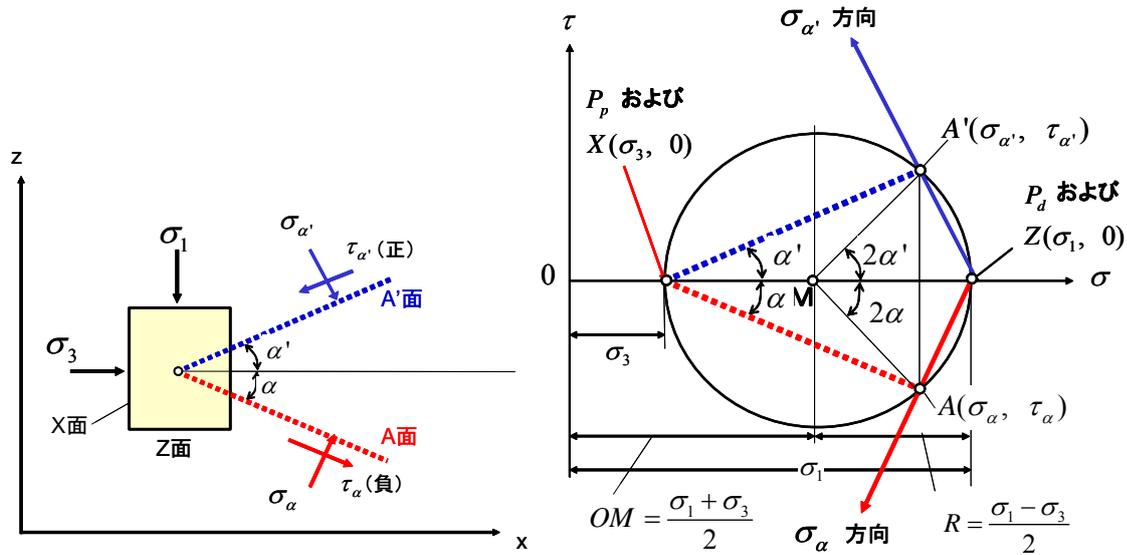


図 16 (矢印の方向が、それぞれ応力成分の正の方向。τは左回りが正)

$\sigma_\alpha = OM + R \cdot \cos 2\alpha$  と  $\tau_\alpha = -R \cdot \sin 2\alpha$  から、次式が求まる。

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\alpha, \quad \tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

常識から、A面に作用する直応力  $\sigma_\alpha$  とせん断応力  $\tau_\alpha$  が求まる。一方、A'面に作用する直応力  $\sigma_{\alpha'}$  とせん断応力  $\tau_{\alpha'}$  は、 $\sigma_{\alpha'} = OM + R \cdot \cos 2\alpha'$  と  $\tau_{\alpha'} = R \cdot \sin 2\alpha'$  から求まる次式から求まる。

$$\sigma_{\alpha'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\alpha', \quad \tau_{\alpha'} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha' \quad \text{教科書式(7.12)}$$

**最大応力傾角面(the maximum angle of stress obliquity)**

■ 応力傾角(the angle of stress obliquity)  $i$  とは? : 応力傾角  $i$  の定義;  $i = \arctan(\tau_\alpha / \sigma_\alpha)$

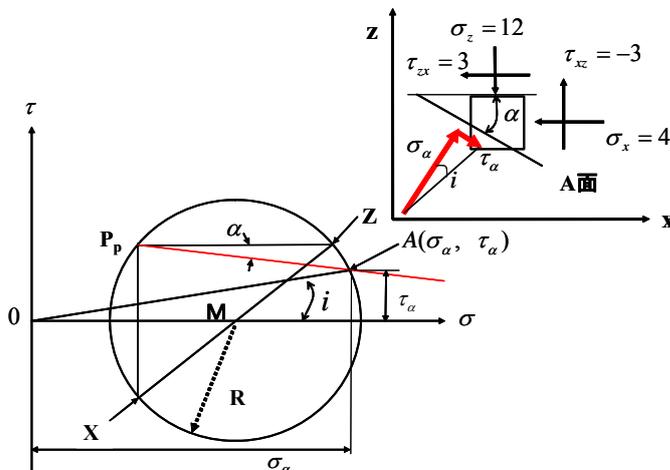


図 17

■ 応力傾角  $i$  の最大値 (最大応力傾角)  $i_{max}$  を、その時の動員された内部摩擦角  $\phi_{mob}$  と呼ぶ (図 18 を

見よ)。(  $\phi_{mob}$  : 土の重要な物理的性質の一つ)

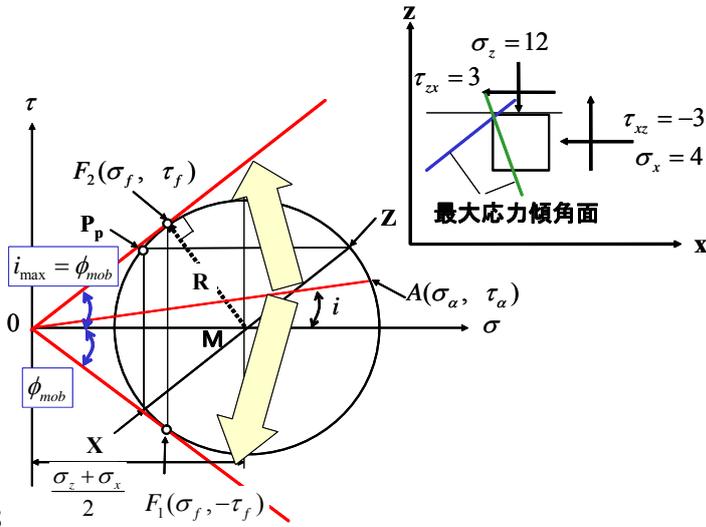


図 18

最大応力傾角面：粘着力が無い場合、せん断滑りが最も生じやすい面である。図 18 での点  $F_1$  と  $F_2$  の座標は、その面の応力状態を表す。

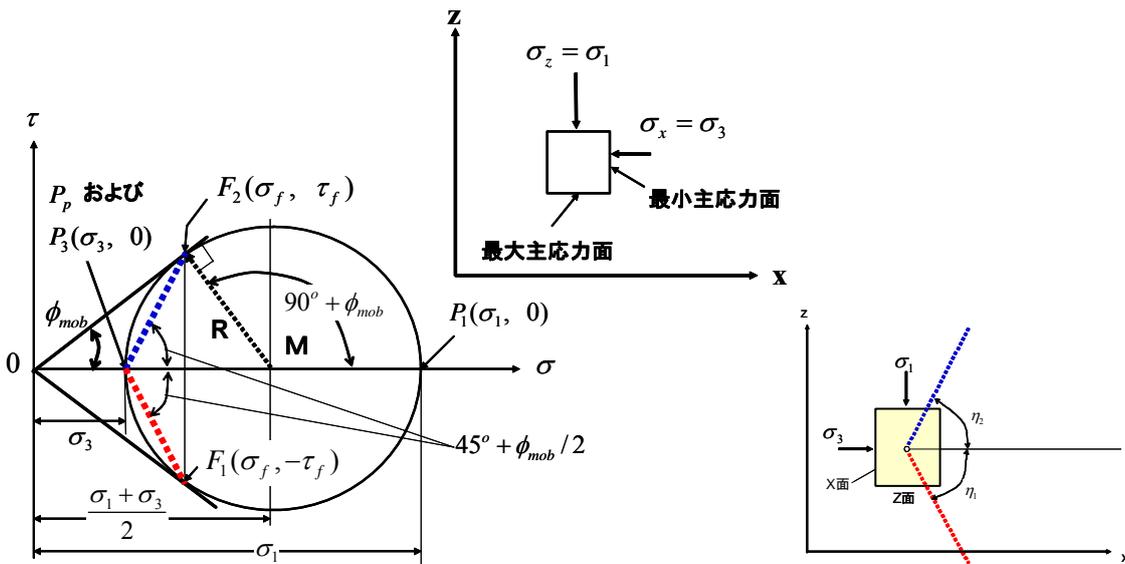


図 19 X面が主応力面の場合の最大応力傾角面

図 19 では、最大応力傾角面  $F_2$  が  $\sigma_1$  の作用する面である Z 面（水平面）となす角度  $\eta_2$  は、から、

$$\angle F_2MO + 2\eta_2 = 180^\circ; \quad 90^\circ - \phi_{mob} + 2\eta_2 = 180^\circ; \quad \eta_2 = 45^\circ + \phi_{mob} / 2$$

一般応力状態での最大応力傾角面の方向

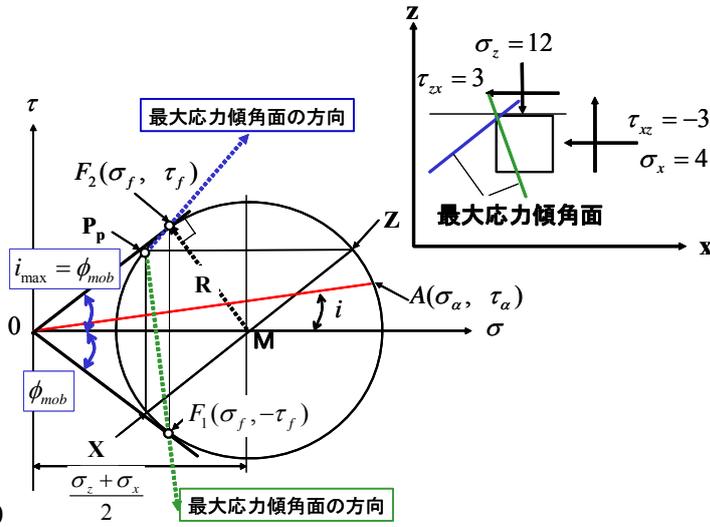


図 20

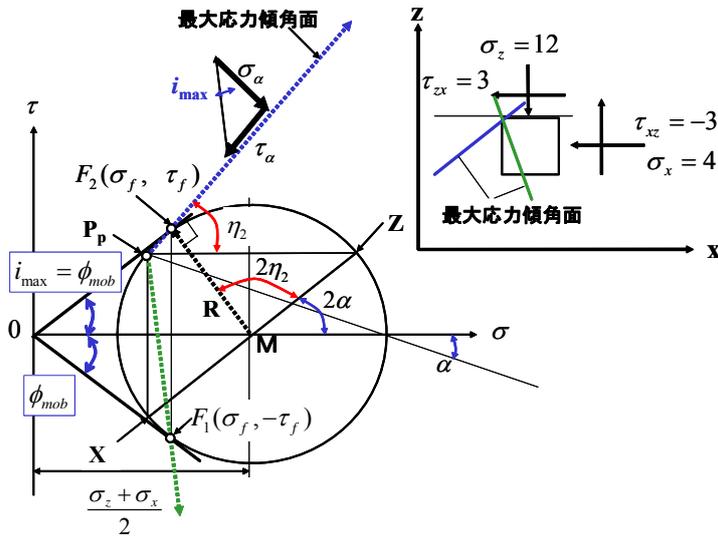


図 21

$\sigma_1$  の作用面が水平方向となす角度を  $\alpha$  とすると、最大応力傾角面  $F_2$  が  $Z$  面 (水平面) となす角度  $\eta_2$  は、

図 20, 21 から

$$\angle F_2MO + 2\eta_2 + 2\alpha = 180^\circ$$

$$90^\circ - \phi_{mob} + 2\eta_2 + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\eta_2 = 45^\circ + \phi_{mob} / 2 - \alpha$$

[7章土のせん断強度 演習問題 7-2]

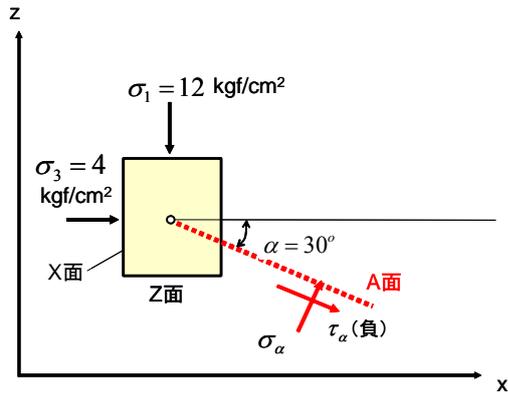
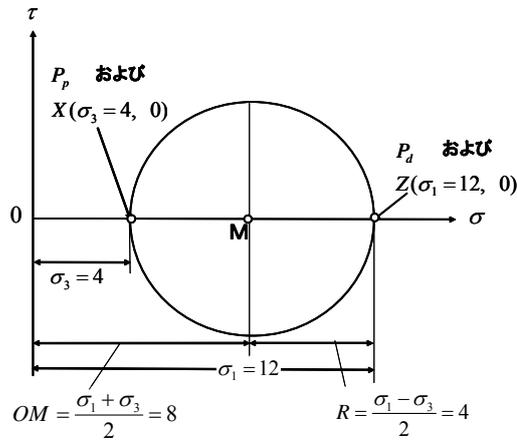


図 1

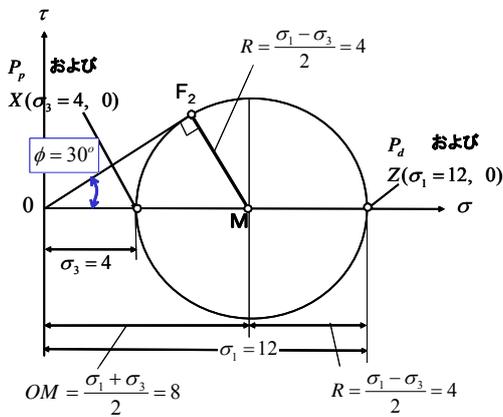
図 1 の要素 A に対して、図に示すような応力が作用している。

- 1) 上記の応力状態をあらわす Mohr 円を描け。
- 2) この応力状態で土が破壊したとする。この土には粘着力が無い。この場合の土の内部摩擦角  $\phi = \arcsin\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}_{\max}$  を求めよ。
- 3) Z面と時計回りで 30 度をなす A 面に作用する直応力  $\sigma_\alpha$  とせん断応力  $\tau_\alpha$  の大きさを求めよ。
- 4) 応力比  $\tau/\sigma$  の絶対値が最大になる二つの最大応力傾角面が Z面となす角度  $\eta_1, \eta_2$  の大きさと、その面に作用するせん断応力  $\tau_f$  と直応力  $\sigma_f$  の大きさを求め、その応力状態を Mohr 円上に点  $F_1, F_2$  として示せ。

[答]

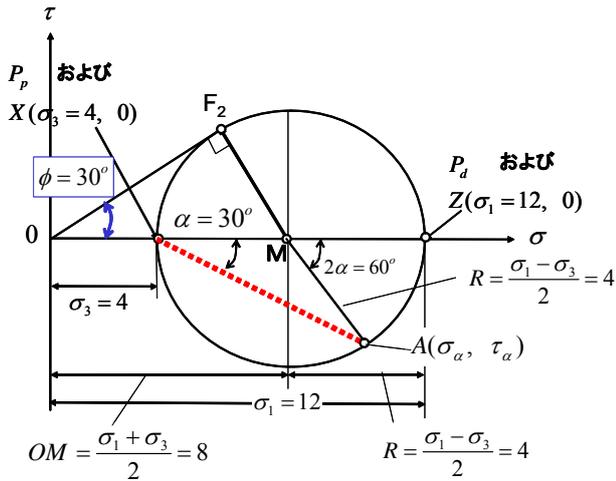


- 1) 上記の応力状態をあらわす Mohr 円。
- 2) この応力状態で土が破壊した時の土の内部摩擦角  $\phi = \arcsin\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}_{\max}$  は、



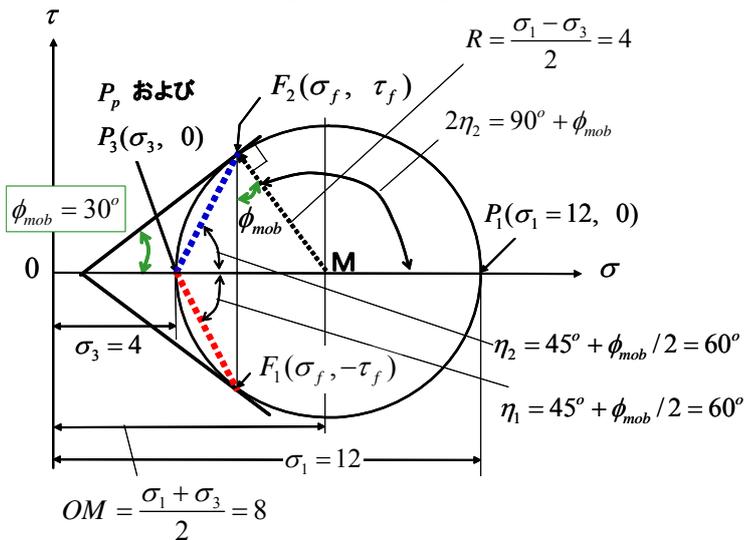
$$\sin \phi = \frac{F_2 M}{OM} = \frac{R}{OM} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \therefore \phi = 30 \text{ 度}$$

3) Z面と時計回りで30度をなすA面に作用する直応力 $\sigma_\alpha$ とせん断応力 $\tau_\alpha$ の大きさは、



$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + R \cdot \cos(60^\circ) = 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ (kgf/cm}^2\text{)} ; \quad \tau_\alpha = -R \cdot \sin(60^\circ) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3.46 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

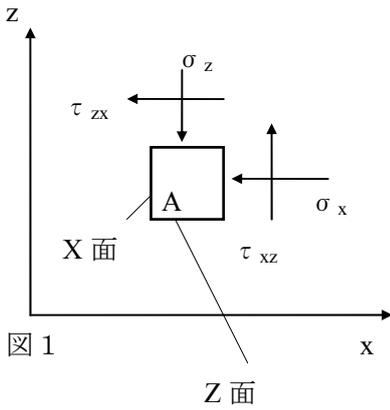
4) 応力比 $\tau/\sigma$ の絶対値が最大になる二つの最大応力傾角面がZ面となす角度 $\eta_1, \eta_2$ と、その面に作用するせん断応力 $\tau_f$ と直応力 $\sigma_f$ の大きさと、その応力状態を表す点 $F_1, F_2$ のMohr円での位置は、



$$\sigma_f = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi_{mob} = 8 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\tau_f = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi_{mob} = \pm 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm 3.46 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

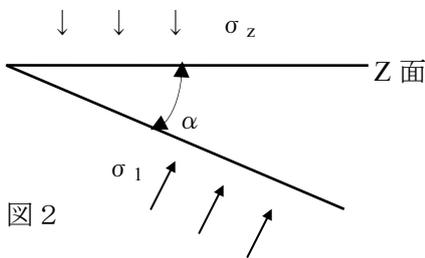
[7章土のせん断強度 演習問題 7-3]



矢印の方向が、それぞれ応力成分の正の方向とする。

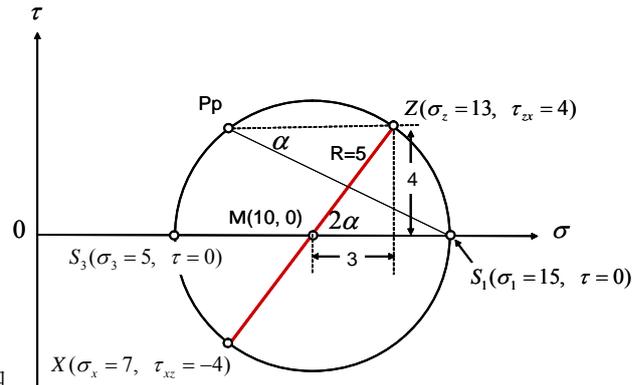
図1の要素Aに対して、以下の応力が作用している

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 13.0 \text{ kgf/cm}^2 \\ \tau_{zx} &= 4.0 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_x &= 7.0 \text{ kgf/cm}^2 \\ \tau_{xz} &= -4.0 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$



- 2) 図3に、上記の応力状態をあらわす Mohr 円を描け。
- 3) 図3を参照して、最大主応力  $\sigma_1$  の大きさと、それが作用する面が x 軸となす角度  $\alpha$  (度) を求めよ。
- 4) この応力状態で土が破壊したとする。この土には粘着力が無い場合、この時の土の内部摩擦角  $\phi = \arcsin\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}_{\max}$  を求めよ。
- 5) Z面から時計回りで60度をなすA面に作用する直応力  $\sigma_a$  とせん断応力  $\tau_a$  の大きさを求めよ。
- 6) 応力比  $\tau_a/\sigma_a$  の絶対値が最大になる二つの面がZ面となす角度  $\eta_1, \eta_2$  の大きさと、その面に作用するせん断応力  $\tau_f$  と直応力  $\sigma_f$  の大きさを求め、その応力状態を図3に描いた Mohr 円上に点  $F_1, F_2$  として示せ。
- 7) 図3で、点  $F_1, F_2$  の応力状態が作用している面(最大応力傾角面)それぞれが、最小主応力  $\sigma_3$  が作用している方向(即ち最大主応力  $\sigma_1$  が作用している面の方向)となす角度(度)を求めよ。

[答]



1) この応力状態をあらわす Mohr 円

2) 最大主応力 ;

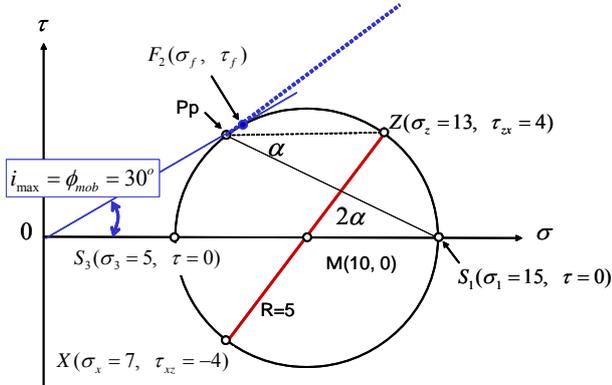
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{13+7}{2} + \sqrt{\left(\frac{13-7}{2}\right)^2 + 4^2} = 10 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 15 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

最小主応力 ;

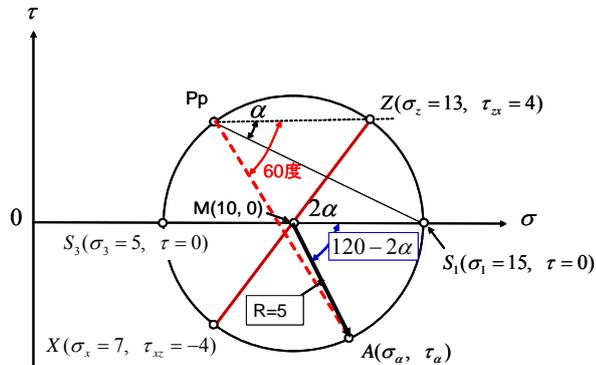
$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - R = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{13+7}{2} - \sqrt{\left(\frac{13-7}{2}\right)^2 + 4^2} = 10 - \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\arctan 2\alpha = 4/3 = 53.1 \text{ 度、 } \alpha = 26.6 \text{ 度}$$

3)  $\sin i_{\max} = \sin \phi_{\text{mob}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$       $i_{\max} = \phi_{\text{mob}} = 30 \text{ 度}$ 。この場合、 $i_{\max} = \phi = 30 \text{ 度}$



4) Z面と時計回りで60度をなすA面に作用する直応力  $\sigma_a$  とせん断応力  $\tau_a$  の大きさを求めよ。

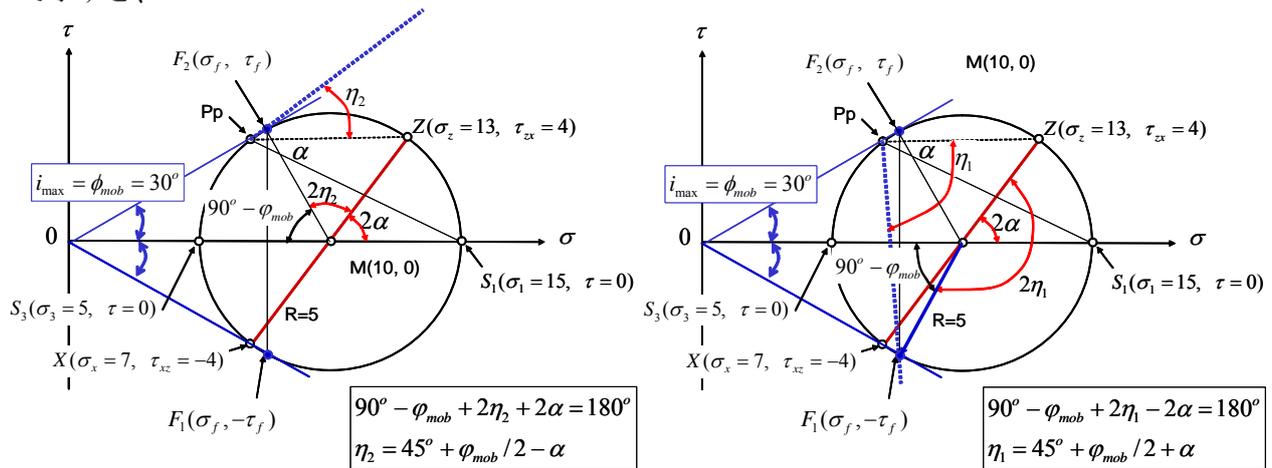


$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R \cdot \cos(120 - 2\alpha) = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R \cdot [\cos 120 \cdot \cos 2\alpha + R \cdot \sin 120 \cdot \sin 2\alpha]$$

$$= 10 + 5 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} \right] = 10 + 5 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} \right] = 12.0$$

$$\tau_\alpha = -R \cdot \sin(120 - 2\alpha) = -R \cdot (\sin 120 \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 120) = -5 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \right) = -4.6$$

5) 応力比  $\tau/\sigma$  の絶対値が最大になる二つの面がZ面となす角度  $\eta_1, \eta_2$  の大きさと、その面に作用するせん断応力  $\tau_f$  と直応力  $\sigma_f$  の大きさを求め、その応力状態を図3に描いた Mohr 円上に点  $F_1, F_2$  として示すと、



$$\eta_2 = 45^\circ + \varphi_{mob}/2 - \alpha = 45^\circ + 30^\circ/2 - 26.6^\circ = 33.4^\circ$$

$$\eta_1 = 45^\circ + \varphi_{mob}/2 + \alpha = 45^\circ + 30^\circ/2 + 26.6^\circ = 86.6^\circ$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos(90^\circ - \varphi_{mob}) = 10 - 5 \cdot \frac{1}{2} = 7.5 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\tau_f = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(90^\circ - \varphi_{mob}) = \pm 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm 4.3 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

6) 図3で、点  $F_1, F_2$  の応力状態が作用している面（最大応力傾角面）のそれぞれが、最小主応力  $\sigma_3$  が作用している方向（即ち最大主応力  $\sigma_1$  が作用している面の方向）となす角度（度）は、

$$\eta_2 + \alpha = 45^\circ + \varphi_{mob}/2 = 60^\circ$$

$$\eta_1 - \alpha = 45^\circ + \varphi_{mob}/2 = 60^\circ$$