第5回 地震時土圧（その1）

龍岡 文夫*／古関 潤一**

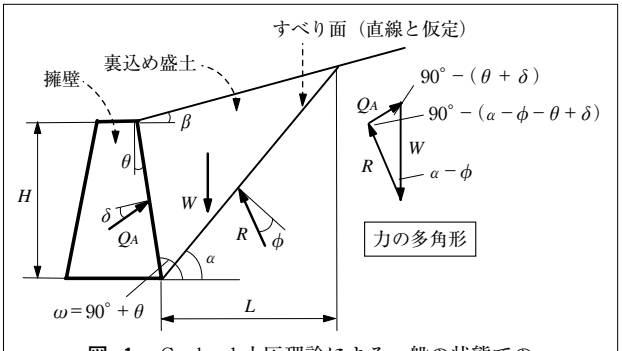
1．はじめに

地震時に擁壁が安定であるためには，擁壁は地震時に作用する動土圧に対して十分大きな抵抗力を持つ必要がある。通常は地震時に擁壁が盛土よりも相対的に安定していると仮定して，地震時の主働土圧を求める。主働状態で検討するのは，この状態では擁壁にも主働方向に慣性力が作用していて，「擁壁＋盛土系」は最も不安定であるからである。

物部[1),2)]と岡部[3)]は，独立に1920年代というきわめて早い時代にこの問題に取組み，今日でも世界各国の耐震設計で使用されている独創的で実用的な解を得た。この解は現在「物部・岡部理論」と呼ばれている。ちなみにMononobe–Okabeは母音の数が大変多く，英語圏の人々には実に発音しにくい。この理論は，コロンブスの卵とでもいうべき，簡単であるが実に卓抜なアイデアに基づいている。すなわち，対象となる「擁壁・裏込め盛土・支持地盤」系全体を傾斜させて，「地球の重力＋地震力による慣性力」の合計である「合慣性力」の方向が鉛直になるようにして，その状態に対して既に解が求まっていた**図−1**に示す「一般状態に対する土圧理論」を適用した。

2．基礎的な仮定

前報[4)]で説明したように，**図−1**の状態で実際に発達する主働すべりは直線ではない。しかし，直線ではないとすると容易には解けないし，また直線としても大きな間違いではなく，この仮定よりも精度が悪い他の幾つかの仮定も用いている。とくに，盛土は等方の変形強度特性を持ち，「ひずみゼロでピーク応力状態に達するが，その後は生じたひずみの大きさに関わらず一定の強度が維持される」という剛完全塑性体を仮定している。このため，水平震度が若干でも増加するごとにすべり面は深くなる（**図−1**での主働すべり面の角度αは小さくなる）。



図−1 Coulomb土圧理論による一般の状態での主働土圧の求め方（常時）

1920年代では，このような仮定をすることはごく自然なことであった。しかし，実際の盛土（特に締固めた盛土）は剛完全塑性体ではなく，ピーク強度を発揮したあと強度は低下して，やがて残留強度に達する（ひずみ軟化現象）。この現象を取入れて物部・岡部理論を修正した，より現実的な理論が提案されている[5)]。この修正物部・岡部理論は次回紹介する。さらに，盛土内の震度は一様と仮定している。実際は盛土内と擁壁の応答加速度は鉛直方向にも水平方向にも位相差があるが，擁壁構造物の剛性と比較すると対象とする擁壁の高さは通常は小さく，また地震動の推定誤差の方がよほど大きいので，この単純化による誤差をことさら問題にすることは少ない。

3．一般的条件でのCoulomb主働土圧

図−1に示す一般的状態の主働土圧Q_Aは，直線のすべり面の方向が水平面となす角度αを未知数として求める。すなわち，それぞれのαのときの主働土圧をQ_A^*として，Q_A^*のαに関しての極大値を求めれば，それが求める主働土圧Q_Aである（式(1)）。

$$Q_A=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\cdot K_A=[Q_A^*]_{\max} \quad \cdots\cdots(1)$$

である。Q_A^*は式(2)aによって得られる。これは，水平方向と鉛直方向の力の釣合いの式を求め，それから主働すべり面に作用する反力Rを消去して得られる。

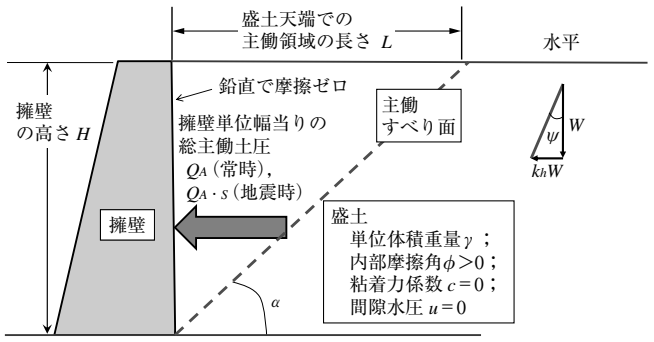
$$Q_A^*=\frac{W\cdot\sin(\alpha-\phi)}{\cos(\alpha-\phi-\theta-\delta)} \quad \cdots\cdots(2)\text{a}$$

$$W=\frac{1}{2}\gamma\cdot H^2\cdot\frac{\cos^2(\theta-\beta)\cdot\{\tan(\theta-\beta)+\cot(\alpha-\beta)\}}{\cos^2\theta} \quad \cdots(2)\text{b}$$

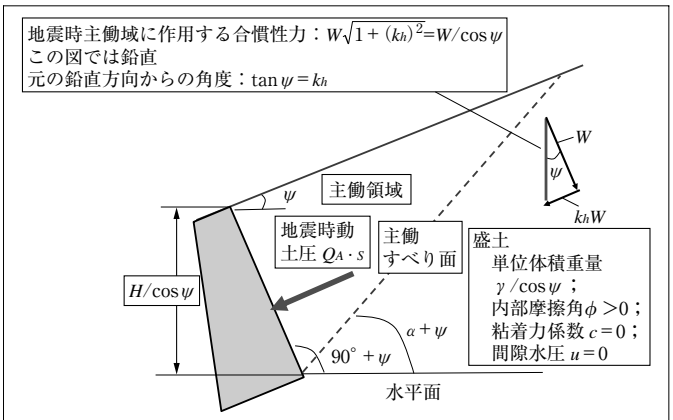
$Q_A^*=[Q_A^*]_{\max}$となる角度αは，式(1)に基づいて次のようにして求める。

① 式(2)bを式(2)aに代入して式(A)を得る。
② $x=\cot\alpha$とおいて式(A)を書換える。
③ 式(A)をxで偏分して，$\partial Q_A^*/\partial x=0$の条件を満たす$x$の値を求める。
④ そのxの値を式(A)に代入すると，Q_A^*の極大値$[Q_A^*]_{\max}$として主働土圧Q_Aが式(3)のように求まる。

＊TATSUOKA Fumio 東京理科大学 理工学部 土木工学科 教授，工博 千葉県野田市山崎2641
＊＊KOSEKI Jun-ichi 東京大学 生産技術研究所 教授，工博 東京都目黒区駒場4―6―1―Ce201



図−2　最も単純な状態での擁壁の模式図



図−3　最も単純な状態（**図−4**）への物部・岡部理論の適用

$$K_A=\left[\frac{\cos(\phi-\theta)}{\cos\theta\cdot\left\{\sqrt{\cos(\theta+\delta)}+\sqrt{\frac{\sin(\phi+\delta)\cdot\sin(\phi-\beta)}{\cos(\theta-\beta)}}\right\}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega\cdot\left\{\sqrt{\sin(\omega+\delta)}+\sqrt{\frac{\sin(\phi+\delta)\cdot\sin(\phi-\beta)}{\sin(\omega-\beta)}}\right\}}\right]^2 \quad \cdots(3)$$

主働領域の大きさを表す長さL（**図−1**参照）の擁壁高さHに対する比は式(4)から求まる。

$$\frac{L}{H}=\frac{1+\tan\theta\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta} \quad \cdots(4)\text{a}$$

ここで，上式中のαは次式を満たす角度として算定される。

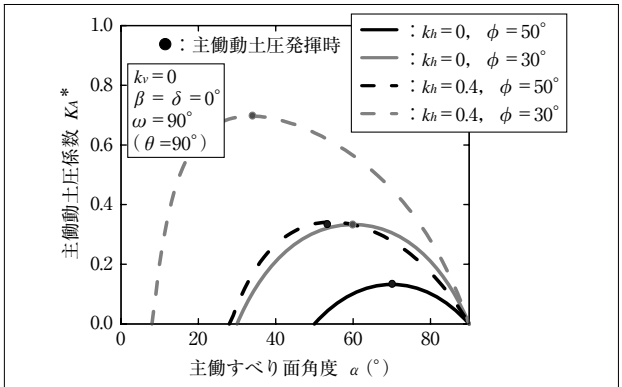
$$\cot(\alpha-\beta)=-\tan(\phi+\delta+\theta-\beta)+\sec(\phi+\delta+\theta-\beta)\cdot\sqrt{\frac{\cos(\theta+\delta)\cdot\sin(\phi+\delta)}{\cos(\theta-\beta)\cdot\sin(\phi-\beta)}} \quad \cdots(4)\text{b}$$

4．物部・岡部動土圧理論

4.1　最も単純な場合

まず，物部・岡部理論の構造を理解するために，**図−2**に示す単純な擁壁（$\beta=0°$，$\delta=0°$，$\omega=90°$（即ち$=0°$）），盛土の粘着力$=0$，鉛直震度$k_v=0$という最も単純な条件で考察する。今，**図−2**に示すように「擁壁・裏込め盛土・支持地盤」系に一様な水平震度k_hが作用しているとする。重量Wの主働領域には「地球の重力＋地震力による慣性力」が作用していて，その合計である「合慣性力」の方向は鉛直方向から角度ψずれている（式(5)）。

$$\tan\psi=k_h \quad \cdots(5)$$



図−4　最も単純な状態(**図−4，5**)での物部・岡部理論による地震時主働土圧係数K_A*とすべり面角度αの代表的な関係[5]

図−3は，**図−2**に示す「擁壁・裏込め盛土・支持地盤」系の全体を角度ψだけ回転させたものである。次に，この状態に作用する主働動土圧を式(3)を求めた方法と同様にして求める。ただし，**図−3**の状態は**図−1**の状態とは次の諸点で異なる。

① 擁壁の裏面での摩擦角度$\delta=0$である。

② 盛土の単位体積重量が，γから$\gamma/\cos\psi$に増加している。

③ 盛土ののり面の傾斜角度βが0°からψに，すべり面の水平面からの傾斜角がαから$\alpha+\psi$に増加している。

④ 擁壁の裏面の鉛直面からの角度θが0°からψに，水平面からの傾斜角度ωが90°から90°$+\psi$となっている。

⑤ 壁面高さが，Hから$H\cdot\cos(\theta+\psi)/\cos\theta$に減少している（**図−9**参照）。**図−2，3**では$\theta=0$なので，$H\cdot\cos\psi$に減少している。

すなわち，式(2)a，(2)bは以下のように変わる。

$$Q_A^*=\frac{W\cdot\sin(\alpha+\psi-\phi)}{\cos(\alpha-\phi)} \quad \cdots(6)\text{a}$$

$$W=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\cos\psi}\cdot(H\cdot\cos\psi)^2\cdot\frac{\cos^2(\psi-\beta)\cdot\{\tan(\psi-\beta)+\cot(\alpha+\psi-\beta)\}}{\cos^2\psi}$$

$$=\frac{1}{2}\gamma\cdot H^2\cdot\cos\psi\cdot\frac{1\cdot\{0+\cot(\alpha+\psi-\psi)\}}{\cos^2\psi}$$

$$=\frac{1}{2}\gamma\cdot H^2\cdot\frac{\cot\alpha}{\cos\psi} \quad \cdots(6)\text{b}$$

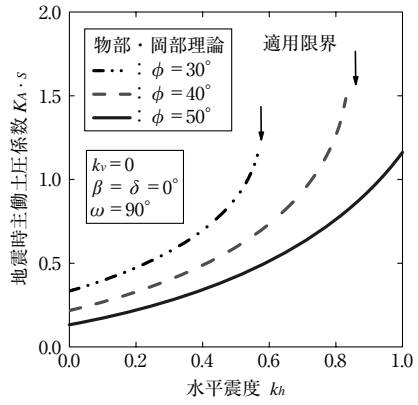
両者を併せて次式を得る。

$$Q_A^*=\frac{1}{2}\gamma\cdot H^2\cdot\frac{\cot\alpha\cdot\sin(\alpha+\psi-\phi)}{\cos\psi\cdot\cos(\alpha-\phi)} \quad \cdots(7)$$

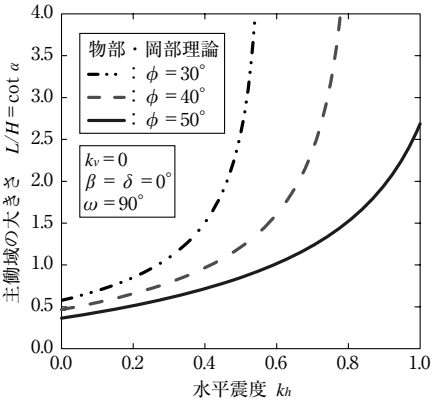
ここで，主働動土圧を，

$$Q_A^*=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\cdot K_A^* \quad \cdots(8)$$

の形で表わした場合，K_A*はそれぞれのすべり面角度αに対する地震時土圧係数である。K_A*は式(7)，(8)を比較すると，次式で表わされることがわかる。



図−5　最も単純な状態（**図−4**，**5**）での物部・岡部理論による地震時主働土圧係数と水平震度の関係[5)]



図−6　最も単純な状態（**図−4**）での物部・岡部理論による地震時主働領域の大きさとと水平震度の関係[5)]

$$K_A^*=\frac{\cot\alpha\cdot\sin(\alpha+\psi-\phi)}{\cos\psi\cdot\cos(\alpha-\phi)} \quad\cdots\cdots(9)$$

図−4 に$\phi=30^\circ$と50°の場合で，水平震度$k_h=0$のとき（すなわち常時）と地震時（$k_h=0.4$）のときのK_A^*とαの関係を示す。前報[4)]で説明したように，それぞれの関係におけるK_A^*の極大値が地震時主働土圧である。即ち，

$$Q_{A\cdot S}=[Q_A^*]_{\max} \quad\cdots\cdots(10)$$

この解は，以下のように求める。すなわち，**図−3** の状態に上記の条件①〜⑤を適用すると，次式が得られる。

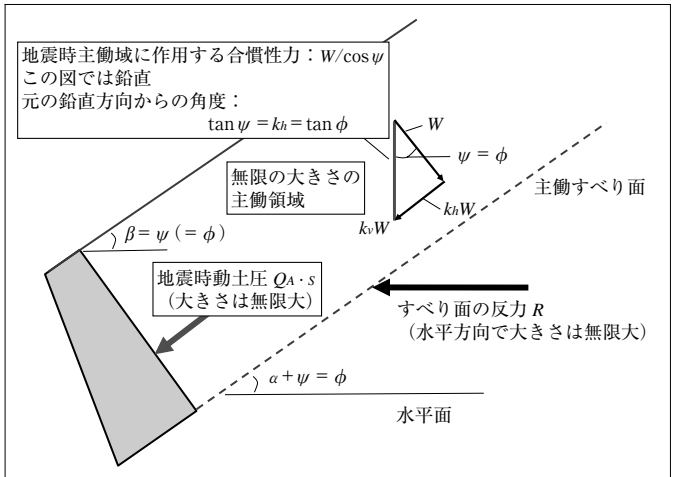
$$Q_{A\cdot S}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{\cos\psi}\cdot(H\cdot\cos\psi)^2\cdot[K_A]_{(\theta=\psi;\beta=\psi;\delta=0)} \quad\cdots\cdots(11)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\cdot\{\cos\psi\cdot[K_A]_{(\theta=\psi;\beta=\psi;\delta=0)}\}$$

$[K_A]_{(\theta=\psi;\beta=\psi;\delta=0)}$は主働動土圧係数であり，式(3)に上記の条件①〜⑤を適用して次式が求まる。

$$[K_A]_{(\theta=\psi;\beta=\psi;\delta=0)}=\left[\frac{\cos(\phi-\psi)}{\cos\psi\cdot\left\{\sqrt{\cos\psi}+\sqrt{\frac{\sin\phi\cdot\sin(\phi-\psi)}{\cos(\psi-\psi)}}\right\}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{\cos^3\psi}\left[\frac{\cos(\phi-\psi)}{1+\sqrt{\frac{\sin\phi\cdot\sin(\phi-\psi)}{\cos\psi}}}\right]^2 \quad\cdots\cdots(12)$$



図−7　最も単純な状態（**図−4**）での物部・岡部理論の水平震度の適用限界

したがって，地震時主働土圧を，

$$Q_{A\cdot S}=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot H^2\cdot K_{A\cdot S} \quad\cdots\cdots(13)$$

の形で表現した場合の地震時土圧係数$K_{A\cdot S}$は，式(11)，(13)を参照すると，次式から得られることがわかる。

$$K_{A\cdot S}=\cos\psi\cdot[K_A]_{(\theta=\psi;\beta=\psi;\delta=0)}=\frac{1}{\cos^2\psi}\left[\frac{\cos(\phi-\psi)}{1+\sqrt{\frac{\sin\phi\cdot\sin(\phi-\psi)}{\cos\psi}}}\right]^2 \cdots(14)$$

主働領域の大きさを表す長さL（**図−2** 参照）の擁壁高さHに対する比は，擁壁と主働すべり面の幾何から次式のので求まるが，**図−2**，**3** では$\beta=\delta=\theta=0$であるので，式(4) a は次式となる。

$$\frac{L}{H}=\frac{1}{\tan\alpha} \quad\cdots\cdots(15)\text{a}$$

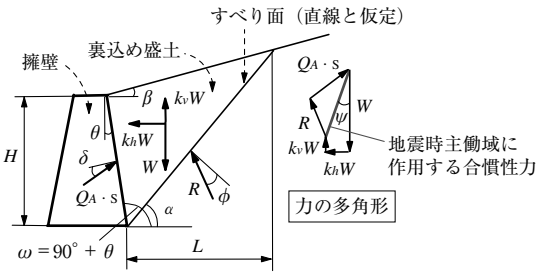
この式に用いるαは，次式を満たす角度として算定される。

$$\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}=-\tan(\phi+\delta+\theta-\beta)+\sec(\phi+\delta+\theta-\beta)\cdot\sqrt{\frac{\cos(\theta+\delta+\psi)\cdot\sin(\phi+\delta)}{\cos(\theta-\beta)\cdot\sin(\phi-\beta-\psi)}} \quad\cdots\cdots(15)\text{b}$$

$\beta=\delta=\theta=0$を式(15) b に代入した式を式(15) a に代入すると次式が得られる。

$$\frac{L}{H}=\frac{1}{\tan\alpha}=-\tan\phi+\sec\phi\cdot\sqrt{\frac{\cos\psi\cdot\sin\phi}{\sin(\phi-\psi)}}=-\tan\phi+\frac{\sec\phi}{\sqrt{1-\frac{\tan\psi}{\tan\phi}}} \quad\cdots(15)\text{c}$$

図−5，**6** に，このようにして求めた動土圧係数$K_{A\cdot S}$（式(14)）と主働領域の大きさL/H（式(15) c ）と水平震度$k_h=\tan\psi$の関係を示す。それぞれの曲線は，内部摩擦角ϕが30°あるいは50°と一定の場合での関係である。これらの関係の適用限界は，$k_h=\tan\psi=\tan\phi$ $(\psi=\phi)$のときである。この状態では**図−7** に示すように，主働すべり面が水平面から角度$\alpha+\psi$がψ＝内部摩擦角ϕと等しくなっている（即ち，$\alpha=0$）。このため，主働領域の大きさが無限大となり，主働動土圧が無限大となっている。k_hがこれ以上大きくなると，式(14)と(15) c は成り立たない。



図−8　物部・岡部理論による地震時での主働土圧の求め方

4.2　一般的な状態

図−1 に示す「擁壁・裏込め盛土・支持地盤」系に一様な水平震度k_hと鉛直震度k_vが作用しているとする。**図−8** を参照して，重量Wの主働領域には「地球の重力＋地震力による慣性力」が作用している。その合計である「合慣性力」の方向は鉛直方向から角度ψずれている（式(16)）。

$$\tan\psi = \frac{k_h}{1-k_v} \cdots\cdots (16)$$

図−9 は，**図−8** に示す「擁壁・裏込め盛土・支持地盤」系の全体を角度ψだけ回転させたものである。次に，この状態に作用する主働土圧を式(3)を求めたのと同様にして求める。ただし，**図−9** の状態は**図−1** の状態とは，次の諸点で異なっている。

① 盛土のもともとの単位体積重量γが$\gamma(1-k_v)/\cos\psi$に変化している。

② 盛土ののり面の傾斜角度がβから$\beta+\psi$に増加している。

③ 擁壁の裏面の鉛直面からの傾斜角度がθから$\theta+\psi$に，水平面から傾斜角度がωから$\omega+\psi$に増加している。

④ 壁面高さがHから$H\cdot\cos(\theta+\psi)/\cos\theta$に減少している。

図−9 の状態に上記の条件①〜④を適用すると，次式が得られる。

$$Q_{A\cdot S} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\cdot(1-k_v)}{\cos\psi}\cdot(H\cdot\cos\psi)^2\cdot K_A \cdots\cdots (17)$$

K_Aは主働動土圧係数であり，式(3)に上記の条件①〜④を適用して，次式から求まる。

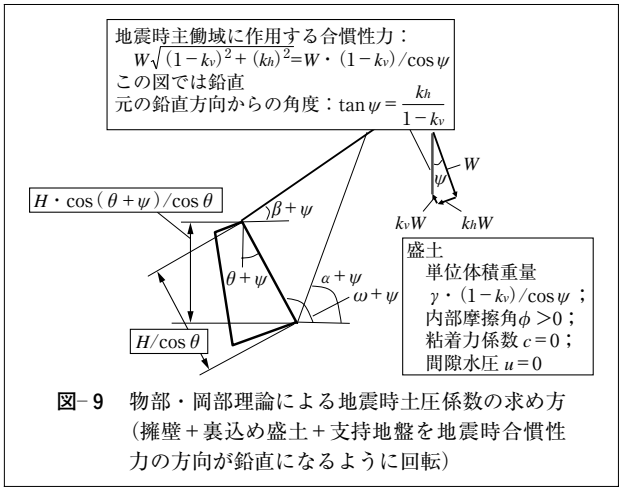
$$K_A = \left[\frac{\sin(\omega+\psi-\phi)}{\sin(\omega+\psi)\cdot\left\{\sqrt{\sin(\omega+\psi+\delta)}+\sqrt{\dfrac{\sin(\phi+\delta)\cdot\sin(\phi-\beta-\psi)}{\sin(\omega-\beta)}}\right\}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\cos(\phi-\theta-\psi)}{\cos(\theta+\psi)\cdot\left\{\sqrt{\cos(\theta+\psi+\delta)}+\sqrt{\dfrac{\sin(\phi+\delta)\cdot\sin(\phi-\beta-\psi)}{\cos(\theta-\beta)}}\right\}}\right]^2 \cdots (18)$$

したがって，

$$Q_{A\cdot S} = \frac{1}{2}\cdot K_{A\cdot S}\cdot\gamma\cdot(1-k_v)\cdot H^2 \cdots\cdots (19)$$

の形での地震時土圧係数$K_{A\cdot S}$を表現した場合，$K_{A\cdot S}$は次式から得られる。



図−9　物部・岡部理論による地震時土圧係数の求め方（擁壁＋裏込め盛土＋支持地盤を地震時合慣性力の方向が鉛直になるように回転）

$$K_{A\cdot S} = \frac{1}{\cos\psi}\cdot\left\{\frac{\cos(\theta+\psi)}{\cos\theta}\right\}^2\cdot K_A$$

$$= \frac{1}{\cos\psi}\cdot\left[\frac{\cos(\phi-\omega-\psi)}{\cos\theta\cdot\left\{\sqrt{\cos(\theta+\psi+\delta)}+\sqrt{\dfrac{\sin(\phi+\delta)\cdot\sin(\phi-\beta-\psi)}{\cos(\theta-\beta)}}\right\}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\cos\psi}\cdot\left[\frac{\sin(\omega+\psi-\phi)}{\sin\omega\cdot\left\{\sqrt{\sin(\omega+\psi+\delta)}+\sqrt{\dfrac{\sin(\phi+\delta)\cdot\sin(\phi-\beta-\psi)}{\sin(\omega-\beta)}}\right\}}\right]^2 \cdots (20)$$

主働領域の大きさLの擁壁高さHに対する比は，式(4)から，その式で用いるαは式（(15)b）から求まる。

5．あとがき

以上の議論は大変複雑であるが，それでも盛土を等方完全塑性体と仮定した場合である。実際の盛土は異方性があり，ひずみ硬化・軟化特性を示すため，実際の挙動はさらに複雑である。**図−5，6** に示す関係も成立たない。修正物部・岡部理論[5]は，盛土の応力ひずみ関係のピーク応力が発揮された後のせん断層の発達に伴うひずみ軟化特性を取入れることによって，もともとの物部・岡部理論を修正したものである。これは，実際的な挙動をかなり説明でき，実務でも取入れられている。これは，次回説明する。

■参考文献

1)　物部長穂：地震上下動に関する考察並びに振動雑論，土木学会誌，Vol. 10−5，1924.

2)　Mononobe, N. and Matsuo, H. : On determination of earth pressure during earthquake, Proc. World Engineering Congress, Tokyo, Vol. 9, pp. 177〜185, 1929.

3)　Okabe, S : General theory on earth pressure and seismic stability of retaining wall and dam, Journal of Japan Society of Civil Engineers, Vol. 10, No. 6, pp. 1277〜1323, 1924.

4)　龍岡文夫：Coulomb土圧，基礎工，Vol. 38，№1，pp. 114〜118，2010.

5)　Koseki, J., Tatsuoka, F., Munaf, Y., Tateyama, M. and Kojima, K. : A modified procedure to evaluate active earth pressure at high seismic loads, Soils and Foundations, Special Issue, pp. 209〜216, 1997.