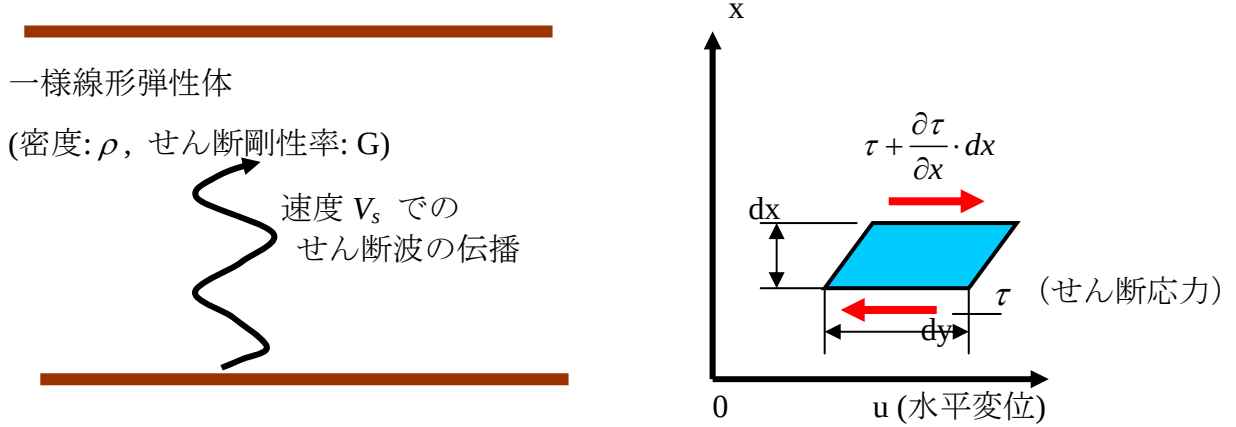


せん断波動方程式からの $G = \rho \cdot V_s^2$ の誘導



1) τ 及び $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} \cdot dx$: 要素の上下面に作用するせん断応力。

2) この要素の運動方程式は、

$$\left\{ \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} \cdot dx \right) - \tau \right\} \cdot dy = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

3) 等方線形弾性体の応力～ひずみ関係は、

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (G: \text{せん断剛性率、一定}) \quad (3)$$

4) 一様な地盤では、 $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$ 。この場合、Eq. 3 を Eq. 2 に代入して、

$$G \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

パラメータ $V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ を用いると、Eq. 4 は、

$$V_s^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

5) 解： 水平変位 u は時間 t と鉛直座標 x の関数なので、次式を仮定できる。

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (6)$$

Eq. 6 を Eq. 5 に代入すると、

$$V_s^2 \cdot \frac{\partial X^2}{\partial x^2} \cdot T = X \cdot \frac{\partial T^2}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$V_s^2 \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial X^2}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial T^2}{\partial t^2} = -\lambda_n^2 \quad (8)$$

ここで、 λ_n は一定値であり、 x と t の関数ではない。Eq. 8 の一般解は、

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_{1n} \cdot \exp(i \cdot \lambda_n \cdot t) + A_{2n} \cdot \exp(-i \cdot \lambda_n \cdot t)\} \quad (9a)$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{1n} \cdot \exp(i \cdot \frac{\lambda_n}{V_s} \cdot x) + B_{2n} \cdot \exp(-i \cdot \frac{\lambda_n}{V_s} \cdot x) \right\} \quad (9b)$$

従って、

$$u = T \cdot X = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \cdot \exp\{\pm i \cdot (t \pm \frac{x}{V_s}) \cdot \lambda_n\} \right\} \quad (9c)$$

実数部だけを取ると、

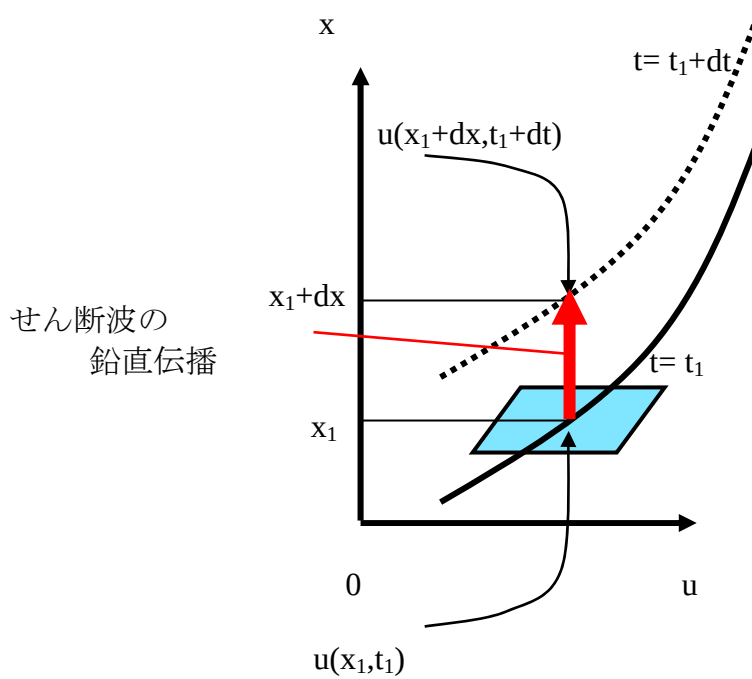
$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_{1n} \cdot \sin(\lambda_n \cdot t) + A_{2n} \cdot \cos(\lambda_n \cdot t) + A_{3n} \cdot \sin(-\lambda_n \cdot t) + A_{4n} \cdot \cos(-\lambda_n \cdot t)\} \quad (10a)$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{1n} \cdot \sin(\frac{\lambda_n}{V_s} \cdot x) + B_{2n} \cdot \cos(\frac{\lambda_n}{V_s} \cdot x) + B_{3n} \cdot \sin(-\frac{\lambda_n}{V_s} \cdot x) + B_{4n} \cdot \cos(-\frac{\lambda_n}{V_s} \cdot x) \right\} \quad (10b)$$

従って、

$$u = T \cdot X = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{n1} \cdot \sin\{\pm(t \pm \frac{x}{V_s}) \cdot \lambda_n\} + C_{n2} \cdot \cos\{\pm(t \pm \frac{x}{V_s}) \cdot \lambda_n\} \right\} \quad (10c)$$

6) 解の意味：



上図は、水平変位 u の位相が時間 t_1 から $t_1 + dt$ に増加する時の上方へ伝播を示す。実際の物質が伝播している訳ではない。

位相速度(phase velocity)は次式で定義される。

$$\text{位相速度} = \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

ここで、

$$u(x_1, t_1) = u(x_1 + dx, t_1 + dt) \quad (12)$$

Eqs. 9c または 10c を Eq. 12 に代入すると、

$$t_1 \pm \frac{x_1}{V_s} = t_1 + dt \pm \frac{x_1 + dx}{V_s} \quad (13a)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm V_s \quad (13b)$$

Eq. 13b は、 V_s はせん断波の位相伝播速度であることを、

$\frac{dx}{dt} = V_s$ と $\frac{dx}{dt} = -V_s$ は、それぞれ上方伝播速度、下方伝播速度を意味する。

7)せん断ひずみ：Eq. 9c または Eq. 10c を参照して、

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{V_s} = \frac{\text{particle velocity}}{\text{phase velocity}} = \frac{\text{粒子速度}}{\text{位相速度}} \quad (14)$$