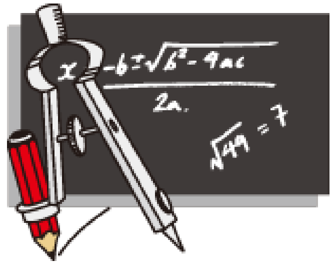
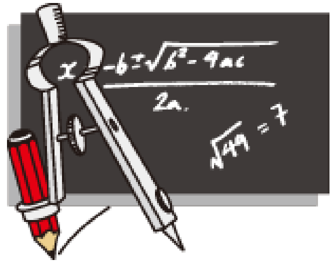


応用数学III
(5) 大数の法則と中心極限定理

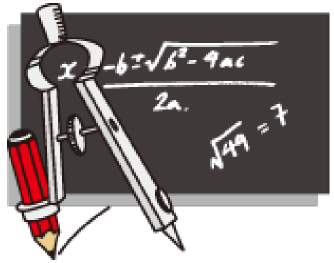
木村真一

講義のスケジュール



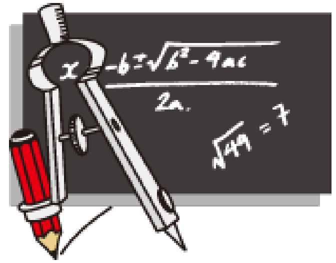
(1)　確率の基礎
(2)　確率変数と確率分布
(3)　いろいろな確率分布
(4)　多次元確率分布
(5)　大数の法則と中心極限定理
(6)　確率過程の基礎１
(7)　確率過程の基礎２
(8)　フーリエ解析
(9)　フーリエ変換の性質
(10)　相関解析
(11)　群・環・体の定義
(12)　準同型写像
(13)　Nを法とする合同式
(14)　線形代数

コイン投げを繰り返す



- 例えばコイン投げを繰り返したことを考えてみましょう。
- 1回1回のコイン投げは確率現象ですから、それぞれ確率変数Xiとして表されます。それぞれ1か0かのいずれかをとります。
- コイン投げを延々と繰り返したとき、確率変数の表の出る割合は1/2になりそうな気がしますね。
- でも、場合によっては全て1の確率だってないわけじゃない。
- このような確率変数の収束はどのように表せば良いのでしょうか。

確率収束



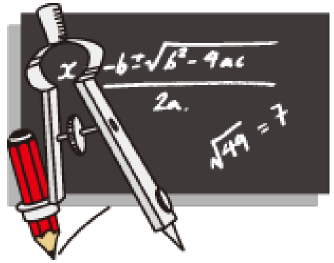
- 確率変数の収束を取り扱うために次のように考えます。
  - nに基づく確率変数（例えば試行平均 $X_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ ）をまず考えます。
  - その確率変数Xnのnを限りなく大きくしたときに、確率変数Xに収束すると言うことは、
  - XnがXの周囲にいて、
  - XnがXの周囲にいない確率が0に収束する。
- これを数学的に表現すると次のようになります。

任意のεについて $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ または $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$

- この様な関係が成り立つときXnはXに確率収束するといいます。

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

分布収束



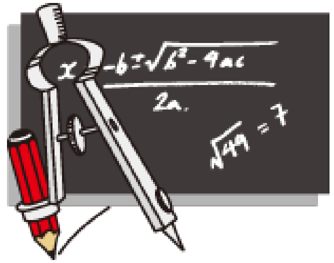
- さらにもう一歩進んで確率変数の分布の収束についても議論してみましょう。
- 確率変数XnとXの分布関数が、それぞれ $F_n(x) = P(X_n \le x)$ と $F(x) = P(X \le x)$ だったとします。
- もし次の関係が成り立つならば分布関数が全体として収束するといっていいでしょう。

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

- このような時、確率変数XnはXに分布収束（または法則収束）するといいます。

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad X_n \xrightarrow{d} F(X) \quad X_n \xrightarrow{t} X \quad X_n \xrightarrow{t} F(X)$$

大数の法則



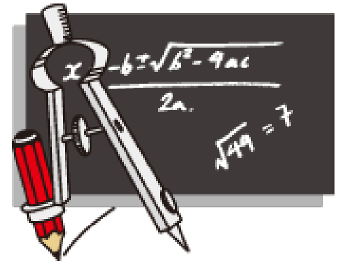
- 確率変数Xは平均が $\mu = E(X)$ 分散が $\sigma^2 = V(X)$ であったとします。
- 確率変数X1,....,Xnは独立であり、かつ、確率変数Xと同一の分布に従っていたとします。
- すると次の法則が成り立ちます。

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots\ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu, (n \to \infty)$$

- これを大数の定理といいます。
- 証明できますか？

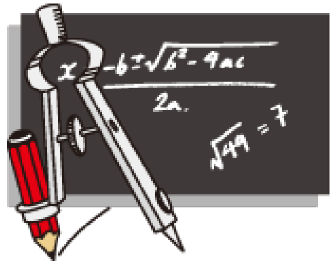
ヒント：チェビシェフの不等式を使います。

大数の法則（つづき）



- 大数の法則は大変強力です。
- なぜって、確率変数Xの分布について何も前提条件がないことです。
- つまり、いかなる確率分布であっても、繰り返し試行を繰り返すと、分布の形が変わらなければ、算術平均は確率分布の真の平均に収束します。

モーメント母関数

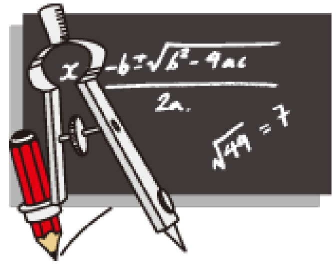


- ここまで確率分布を分布関数で表してきました。
- ここでもう一つの表現として「モーメント母関数」と言うのを導入します。
- 中心極限定理の証明に使いたいからです。
- モーメント母関数は次のように定義されます。

$$\psi(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int e^{tx} f(x) dx$$

- 但し、$\psi(0)=1$とします。

モーメント母関数の意味



- モーメント母関数はその名の通りモーメントを計算するときにとっても便利です。
- 試しに1回微分して見ましょう

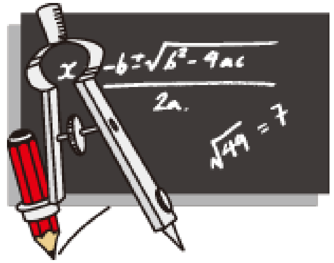
$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{dE\left[e^{tX}\right]}{dt} = E\left[Xe^{tX}\right]$$

- ここでt=0ならば

$$\left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=0} = E[X]$$

- おっとこれは平均ですね。

モーメント母関数の意味（つづき）



- つづいて2回微分です。

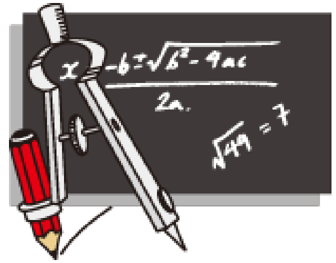
$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{dE\left[Xe^{tX}\right]}{dt} = E\left[X^2 e^{tX}\right]$$

$$\left.\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E\left[X^2\right]$$

- これは2次モーメントですね
- ご想像通りk次のモーメントが求めたければ

$$\left.\frac{d^K\psi(t)}{dt^K}\right|_{t=0} = E\left[X^K\right]$$

二項分布のモーメント母関数



- まずは計算して見てください。

- 結果は

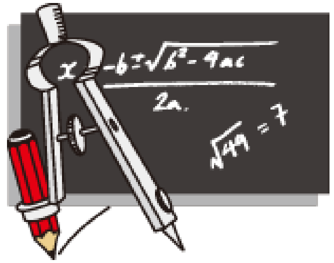
$$\psi(t) = h(t)^n$$
$$h(t) = (1-\theta) + \theta e^t$$

- これを使って平均と分散を計算して見ましょう。

$$\mu = n\theta \qquad \sigma^2 = n\theta(1-\theta)$$

- そう、先の結果と一致しますね。
- しかも簡単、これは便利

正規分布のモーメント母関数



- ここもまずは計算して見てください
- 結果は

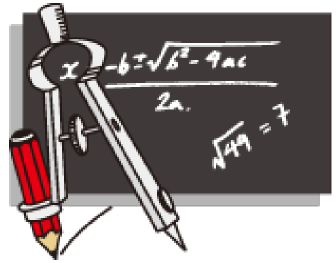
$$\psi(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right\}$$

- これを使って平均と分散を計算して見ましょう。

$$\left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mu \qquad \left.\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2 \qquad \sigma^2 = \sigma^2$$

- これも先の結果と一致しますね。

モーメント母関数と確率分布

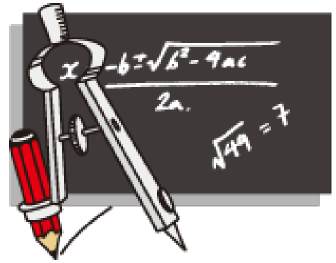


- 密度関数がわかっていれば、モーメント母関数は必ず求められます。
- では逆はどうでしょう。
- モーメント母関数は全てのモーメントを与えることができるわけですから相当強力なはずです。
- 確率変数Xと確率変数Yのモーメント母関数がt=0の近傍で一致するとき、2つの確率変数の確率分布は同じであるということがわかっています。

 （証明はあまりに高度なのでここではパス。）

 （ただ、重要な性質として知っておいてください。）

特性関数

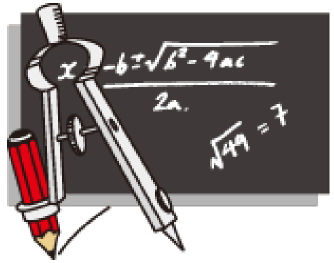


- ここで一つだけ注意は、モーメント母関数は全ての確率分布に存在するわけではありません。
- この問題を解決したさらに強力な関数が特性関数です。
- 次のように定義します。

$$\psi(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int e^{itx} f(x)dx$$

- 単に複素数に拡張しただけです。
- 特性関数は全ての確率分布について存在し、かつ特性関数が同一であるならば確率分布が同一です。

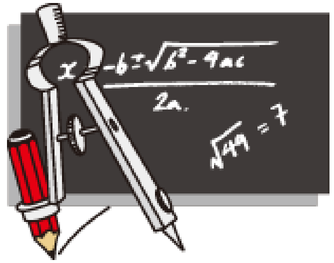
中心極限定理



- まずいきなり定理を紹介しましょう。
- 確率変数Xがあって平均がμ=E[X]で分散がσ^2=V[X]だとします。
- 確率変数X1……Xnは互いに独立で同一の確率分布Xと同じだとします。
- 確率変数Xの標準化した確率変数を用意し、次のような確率変数を定義します。

$$Z_n = \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}$$

中心極限定理（つづき）



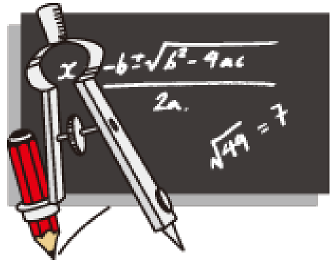
- すると次が成り立ちます。

$$Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

- これはすごいことになってしまいました。
- 中心極限定理では確率分布の形を前提にしていません。
- ということはどんな確率分布であっても繰り返し実験を行うなら、標準化された正規分布に収束するというのです。
- 証明してみましょう。

独立な確率変数の和の分布



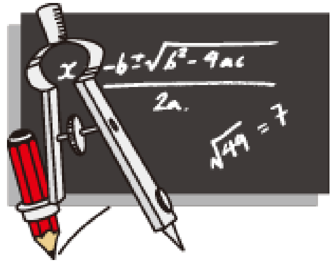
- 互いに独立な確率変数X1とX2があったとします。
- 分布はそれぞれf1(x)、f2(x)だったとします。
- S=X1+X2という確率変数を作ったときこの分布はどのようになっているでしょうか。

- まず離散的に考えて見ます
- S=xである確率は

$$P(S=x)=P(X1+X2=x)$$

- さてX1=kだったとすると、S=xであるためには....
- そうX2=x-kであれば良いですね。

独立な確率変数の和の分布（つづき）

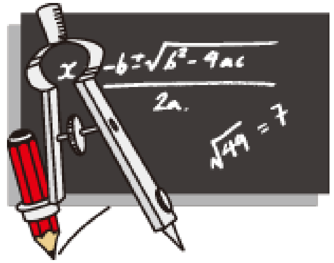


- つまり、P(X1=k)P(X2=x-k)がS=xである確率です。
- ここでkはいろんな可能性があります。
- ですから、S=xを満たす可能性を計算するにはその全てを足し会わせる必要があります。
- つまり

$$f(x)=\sum_{k=0}^{x} f_1(k) f_2(x-k)=\sum_{k=0}^{x} f_1(x-k) f_2(k)$$

- これを「たたみこみ」といいます。

連続型確率変数のたたみこみ



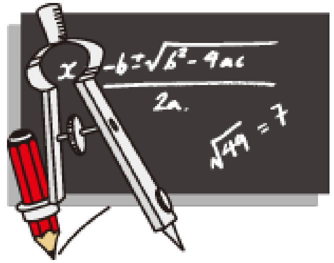
- たたみこみは連続型確率変数にも拡張できます。
- X1、X2を互いに独立な連続型確率変数として、密度関数をf1(x)、f2(x)、分布関数をF1(x)、F2(x)とします。
- これらの和の確率変数X=X1+X2の密度関数をf(x)、分布関数F(x)とします。

$$F(x) = P(X_1 + X_2 \le x) = \iint_{x_1 + x_2 \le x} f_1(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x-x_1} f_2(x_2) dx_2 \right\} f_1(x_1) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x - x_1) f_1(x_1) dx_1$$

連続型確率変数のたたみこみ（つづき）



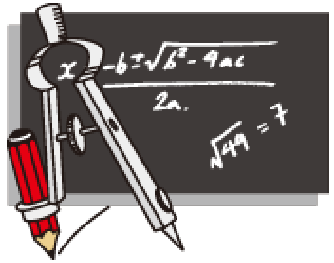
- 両辺を微分すれば

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-x_1)f_1(x_1)dx_1$$

- x2を使っても同じことができるから

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)f_1(x-x_2)dx_2$$

例題

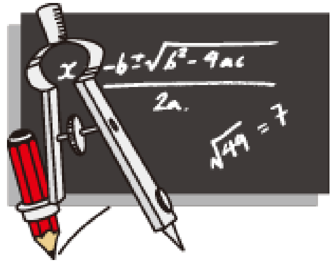


- X1、X2が互いに独立で同一の指数分布 $f_1(t) = f_2(t) = ae^{-at}$ (t≧0)に従うとき、和の分布を求めてください。

$$f(x) = \int_0^x f_2(x-t) f_1(t) dt = \int_0^x ae^{-a(x-t)} ae^{-at} dt$$

$$= a^2 e^{-ax} \int_0^x dt = a^2 x e^{-ax}$$

たたみこみの表現



- たたみこみはとてもよく使うので、いちいち積分で書かずに次のように簡単に表します。

$$f = f_1 * f_2$$

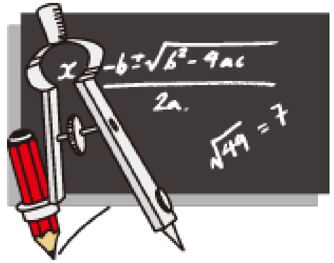
- 先の例でもわかるように、たたみ込みは交換法則が成り立ちます。

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

- また、結合法則も成り立ちます。

$$f_1 * \left(f_2 * f_3\right) = \left(f_1 * f_2\right) * f_3 = f_1 * f_2 * f_3$$

n重たたみこみ



- たたみこみは何回繰り返してよいですから、n回たたみこみを行ったとき次のように表します。

$$f = f_1 * f_2 * \ldots\ldots * f_n$$

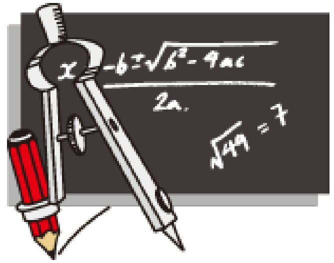
- n個が全て同じ分布であれば、次のように表します。これをn重たたみこみと言います。

$$f = f_1 * f_1 * \ldots\ldots * f_1 = f_1^{(n)}$$

- また分布関数をベースに書くこともできます。X1...Xnが互いに独立な同一の分布関数F1にしたがって分布するとき

$$P\left(X_1 + \ldots\ldots + X_n \leq x\right) = F_1^{(n)}\left(x\right)$$

まとめ



- 確率収束
- 分布収束
- 大数の法則
- モーメント母関数
- 特性関数
- 中心極限定理
- たたみこみ